VI JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA
CIÊNCIA E TECNOLOGIA TRANSFORMANDO A SOCIEDADE
UFFS - CAMPUS CHAPECÓ
17 e 18 de Outubro de 2016
UFFS

ELIPSES DE CURVATURA DE SUPERFÍCIES DE TRANSLAÇÃO IMERSAS EM IR^n, n≥4

DANIEL ARGEU BRUXEL[1,2*], ROSANE ROSSATO BINOTTO [1,2]

[1]Universidade Federal da Fronteira Sul, c*ampus* Chapecó; [2]Grupo de Pesquisa Tecnologias da informação e comunicação, matemática e educação matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul;
*Autor para correspondência: Daniel Argeu Bruxel (dab.bruxel@gmail.com)

1 Introdução

O presente trabalho é parte integrante do projeto de pesquisa Caracterização da geometria local de 3-variedades imersas em R^6 por meio de seus projetivos de curvatura, aprovado no Edital Nº 281/UFFS/2015.

Dada uma superfície M imersa em IR^n, n≥4, para cada ponto $p \in M$ podemos definir uma elipse associada a p no subespaço normal a M em p, N_pM, denominada elipse de curvatura de M em p, definida como sendo o lugar geométrico de todos os extremos dos vetores curvatura de seções normais ao longo de todas as direções tangentes a M em p.

O conceito de elipse de curvatura foi utilizado por Little (1969) para a caracterização de propriedades geométricas de superfícies em IR^4. Este conceito também foi estudado por Moraes (2002) para superfícies imersas em IR^n, n≥5, onde foram estabelecidas novas expressões que podem ser obtidas para parametrizações quaisquer da imersão da superfície.

De acordo com Moraes (2002) uma expressão para a elipse de curvatura em um ponto q de M pode ser dada por

$$\varphi(\theta) = \mathrm{H} + \mathrm{B}\cos(2\theta) + \mathrm{C}\,\mathrm{sen}(2\theta), \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq 2\pi\,.$$

Dependendo da linearidade dos vetores H, B e C, obtemos a natureza da elipse de curvatura que pode ser uma elipse, um segmento de reta ou um ponto.

Além disso, nos pontos de M que esta elipse se degenerar em um segmento temos os pontos semiumbílicos de M e naqueles que ela se degenerar em um ponto temos os pontos umbílicos de M.

2 Objetivo

O trabalho tem como objetivo descrever os diversos tipos de elipses de curvatura associadas a superfícies de translação imersas em IR^n, n≥4, a fim de estudar as propriedades locais destas superfícies considerando o tipo de ponto semiumbílico e umbílico, e o contato destas superfícies com hiperplanos de IR^n, n≥4.

3 Metodologia

Este trabalho foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica com o uso dos *softwares* GeoGebra e Mathematica como ferramenta de apoio para facilitar os cálculos matemáticos.

4 Resultados e Discussão

Dadas duas curvas regulares $\alpha, \beta : S^1 \to \mathrm{IR}^n$, n≥4, de classe C^2, parametrizadas pelos seus respectivos comprimentos de arco, a superfície de translação associada a α e β é dada pela imagem da imersão $f : S^1 \times S^1 \to \mathrm{IR}^n$, $f(s,t) = \frac{1}{2}\,(\alpha(s) + \beta(t))$.

A elipse de curvatura de uma superfície de translação em *q = f(s,t) ≡ (0,0,0,...,0)* pode ser definida por

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{(1-\omega^2)}\left[\left(\alpha''(s)\right)^N + \left(\beta''(t)\right)^N\right] + \frac{1}{(1-\omega^2)}\left[(1-2\omega^2)\left(\alpha''(s)\right)^N - \left(\beta''(t)\right)^N\right]\cos(2\theta) - \frac{2\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}\left[\left(\alpha''(s)\right)^N\right] sen(2\theta),$$

sendo $\omega = \langle \alpha'(s), \beta'(t) \rangle$ o produto escalar e os vetores $(\alpha''(s))^N$ e $(\beta''(t))^N$ as componentes normais de $\alpha''(s)$ e $\beta''(t)$, respectivamente.

Observamos que, quando as curvas α e β estão em subespaços ortogonais de IR^n, a elipse de curvatura da superfície de translação sempre se degenera em todos os seus pontos.

Para o caso geral, obtivemos a seguinte proposição:

Proposição 1: A elipse de curvatura em *f(s,t)* não se degenera se, e somente os vetores $(\alpha''(s))^N$ e $(\beta''(t))^N$ são linearmente independentes, ou seja, $\langle \alpha'(s), \beta'(t) \rangle \neq 0$.

A proposição 2 apresenta os casos degenerados.

Proposição 2: Dada uma superfície de translação imersa em IR^n, $n \geq 4$, temos que:

i) A elipse de curvatura em q se degenera num segmento não radial se, e somente se,

$< \alpha'(s), \beta'(t) >= 0$ e os vetores $(\alpha''(s))^N$ e $(\beta''(t))^N$ são linearmente independentes.

ii) Se $< \alpha'(s), \beta'(t) >= 0$, a elipse de curvatura em q se degenera num segmento radial se, e somente se, os vetores $(\alpha''(s))^N$ e $(\beta''(t))^N$ são linearmente dependentes e distintos. Quando um deles é nulo o ponto q é extremo do segmento radial que determina a elipse de curvatura.

Porém, se $< \alpha'(s), \beta'(t) > \neq 0$ a elipse se degenera num segmento radial se, e somente se, os vetores $(\alpha''(s))^N$ e $(\beta''(t))^N$ são linearmente dependentes com somente um deles não nulo. Neste caso, o ponto é extremo do segmento radial que determina a elipse de curvatura se, e somente se,

$$(\alpha''(s))^N = 0 \text{ e } (\beta''(t))^N \neq 0, \text{ ou } (\beta''(t))^N = 0,\ (\alpha''(s))^N \neq 0 \quad \text{e} < \alpha'(s), \beta'(t) > = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

iii) A elipse de curvatura em q se degenera num ponto diferente da origem q se, e somente se, $(\alpha''(s))^N = (\beta''(t))^N \neq 0$ e $< \alpha'(s), \beta'(t) > = 0$.

Ela é a própria origem q se, e somente se, $(\alpha''(s))^N = (\beta''(t))^N = 0$.

A fim de analisar a geometria local das superfícies de translação podemos considerar o cone das direções degeneradas destas superfícies a partir da elipse da curvatura.

O cone das direções degeneradas no ponto $q=f(s,t)$ é o conjunto de todas as direções normais degeneradas μ, cuja matriz Hessiana da função altura associada a imersão f, na direção μ tem coposto 1.

Seja $q=f(p) \equiv (0,\ldots 0)$ e $f_\mu = < f(p), \mu >$ a função altura associada a imersão f na direção normal $\mu \neq 0$.

Seja N_qM o espaço das direções normais da superfície de translação M em q. Dizemos que $\mu \in N_qM$ é uma direção degenerada em $p=(s,t)$ se, e somente se,

$$< \alpha''(s), \mu > . < \beta''(t), \mu > = 0.$$

O cone das direções degeneradas de coposto 1, em q é dado por:

$$C_q = \{ \mu \,/ < \alpha'', \mu > . < \beta'', \mu > = 0 \ e \ (< \alpha'', \mu >^2 + < \beta'', \mu >^2) \neq 0 \}.$$

A condição $< \alpha'', \mu > . < \beta'', \mu > = 0$ é equivalente a $\mu \in C_q$ ou μ pertencer ao complemento ortogonal do primeiro espaço normal de M em q, onde o primeiro espaço normal de M em q, denotado por N_q^1M, é o espaço gerado por $(\alpha''(s))^N$ e $(\beta''(t))^N$.

Como resultado obtemos:

Proposição 3: Dada a superfície de translação M imersa em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, temos que:

i) Se a elipse de curvatura em q não se degenera ou se degenera num segmento não radial, então C_q é um par de retas concorrentes no plano $N_q^1 M$.

ii) Se a elipse de curvatura em q se degenera num segmento radial com extremo em q então C_q é a reta $N_q^1 M$.

iii) Se a elipse de curvatura em q se degenera num segmento radial com q não sendo extremo deste segmento ou se ela degenera num ponto diferente da origem q, então C_q é o conjunto vazio.

iv) Se a elipse de curvatura em q é a própria origem q então C_q é o conjunto vazio e todas as direções degeneradas são de coposto 2.

5 Conclusão

A partir desta análise concluímos que em caso de superfícies de translação, dependendo de sua natureza é possível encontrar todos os tipos de elipses de curvatura. E neste caso, pode haver a incidência de pontos não semiumbílicos, semiumbílicos e umbílicos.

Além disso, a partir do cone das direções degeneradas é possível descrever localmente a geometria local dessas superfícies.

Palavras-chave: pontos umbílicos. Pontos semiumbílicos. Cone das direções degeneradas.

Fonte de Financiamento

PRO-ICT/UFFS

Referências

BINOTTO, R. R. **Projetivos de Curvatura**.130f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, 2008.

LITTLE, J. A. On Singularities of Submanifolds of Higher Dimensional Euclidean Space. **Annali Mat. Pura et Appl**. (ser 4A) V. 83, p.261-336, 1969.

MORAES, S. M. **Elipses de Curvatura no Estudo de Superfícies Imersas em IR^n, n ≥ 5**. 102f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, 2002.