



ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES NO ÂMBITO DA ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: LIMITES E POSSIBILIDADES A PARTIR DA NOÇÃO DE INFINITÉSIMO

DANIELI BINOTTO^{1,2*}, MÉRICLES THADEU MORETTI³, BÁRBARA CRISTINA PASA^{2,4}

1 Introdução

As dificuldades apresentadas por estudantes de todos os níveis de ensino na compreensão de objetos matemáticos e o acesso a esses objetos, a partir de suas representações semióticas, tornam o trabalho com a Matemática peculiar e diferente de outras ciências.

Diante disso, Raymond Duval (2003) propôs uma teoria cognitiva – Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que destaca a importância das representações semióticas para a apreensão dos objetos matemáticos. Na perspectiva desta teoria, a compreensão integral de um objeto matemático perpassa a diversidade de representações semióticas que se pode ter do mesmo objeto matemático e, mais do que isso, as conversões entre ao menos dois registros de representação (DUVAL, 2004).

Sobre o esboço de curvas de funções, Duval (2011) afirma que somente uma *abordagem de interpretação global de propriedades figurais* possibilita a compreensão integral da curva e do que ela representa. Nesta abordagem, é preciso identificar unidades significativas de cada representação e coordená-las. Duval (2011) apresenta essa abordagem a partir da análise da função polinomial do primeiro grau (*QUOTE* $y=ax+b$ $y=ax+b$). Nesta análise, o autor ressalta a importância de perceber no coeficiente angular aa , o sentido da inclinação da reta, relacionando os parâmetros $ae bda$ função com propriedades gráficas. Isto significa que, para que haja uma compreensão integral do esboço de uma curva segundo este autor, é necessário conhecer regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro de representação algébrica. A partir deste estudo de Duval

1 Estudante do curso de Engenharia Ambiental e Sanitária, Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) - campus Erechim. E-mail: danieli.binotto@outlook.com.

2 Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Tecnologias – GEPEM@T.

3 Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Estrasburgo e Pós-doutor pela Universidade de Lisboa. Professor em exercício voluntário na Universidade federal de Santa Catarina (UFSC) e Professor permanente do PPGECT (UFSC). E-mail: mthmoretti@gmail.com.

4 Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professora adjunta da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), campus Erechim, RS. E-mail: bapasal@htomail.com.



(2011), a abordagem de interpretação global de propriedades figurais vem inspirando pesquisadores na busca por recursos e/ou elementos que permitam uma associação entre variáveis visuais (unidades significativas gráficas) e unidades significativas algébricas. Uma vez que a exigência pela compreensão e interpretação de fenômenos matemáticos, em diversas áreas de conhecimento, vem aumentando cada vez mais e com isso a necessidade encontrar soluções ou alternativas para que o ensino de fato possibilite a aprendizagem da Matemática.

Como resultados da pesquisa, são apresentadas reflexões sobre uma metodologia alternativa acerca do esboço da curva da função $y = \text{sen } x$ no ensino médio e superior que pode e foi estendida para as funções $y = \text{cos } x$ e $y = \text{tg } x$, a partir do caminho alternativo proposto por Pasa (2017), o qual utiliza a taxa de variação da função como recurso para a interpretação global, calculada e compreendida por meio da noção de infinitésimo, a qual permite evidenciar características fundamentais das funções como a transformação e o dinamismo e variação, informações que muitas vezes passam despercebidas ou não são compreendidas.

2 Objetivo

Propor uma metodologia alternativa para abordar o esboço de curvas com o emprego das a taxas de variação da função calculada e compreendida a partir da noção de infinitésimos, discuti-la com enfoque na interpretação global das propriedades figurais e exemplificar o estudo da função seno para ilustra a metodologia proposta.

3 Metodologia

A pesquisa bibliográfica iniciou-se com o estudo na tese de doutorado de Pasa (2017), que serviu como base para o desenvolver deste projeto, intitulada *A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais*, posteriormente artigos e livros escolhidos de acordo com as referências nela apresentadas foram aprofundados e compreendidos. Dentre eles o artigo de Raymond Duval, precursor da *Teoria Cognitiva dos Registros de Representação Semiótica* e alicerce desta pesquisa, intitulado *Gráficos e equações: a articulação de dois registros* (Trad. Méricles Thadeu Morretti, 2011). Além de diversos trabalhos específicos sobre o esboço de curvas nesta perspectiva dos quais se extraiu elementos para construção da proposta.

4 Resultados e Discussão



O acréscimo de uma quantidade infinitesimal, definida na pesquisa de Pasa (2017), como Δx , foi feita ao valor de x para o cálculo da taxa média de variação da função. Como a quantidade acrescida ao valor de x , Δx , é um infinitésimo, o valor da taxa de variação média (TMV) pode ser considerada como a taxa de variação instantânea da função em x ($TVI(x)$). Uma análise dos sinais da $TVI(x)$ para os valores do domínio fornece informações sobre a reta tangente à curva naquele ponto. Este resumo se limita a apresentar a proposta para a função seno como exemplo da metodologia proposta, mas foi desenvolvido para demais funções. Inicialmente é possível calcular a TMV da função $y = \text{sen } x$ para o intervalo $[x, x + \Delta x]$.

$$TMV = \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}$$

Utilizando o seno da adição de dois arcos, obtém-se:

$$TMV = \frac{\text{sen } x \cdot \cos \Delta x + \text{sen } \Delta x \cdot \cos x - \text{sen } x}{\Delta x}$$

Os valores de $\text{sen } \Delta x = \Delta x$ e $\cos \Delta x = 1$ podem ser deduzidos por meio de um triângulo retângulo genérico de arco Δx ou então a partir do ciclo trigonométrico. Sendo Δx um infinitesimal, encontra-se a taxa de variação instantânea da função $y = \text{sen } x$, a qual é $TVI(x) = \cos x$.

Após o estudo do sinal da taxa de variação instantânea é possível apresentar uma tabela que ilustra o comportamento (crescimento e decrescimento) da curva da função $y = \text{sen } x$ ao longo do domínio, e assim, concluir e compreender sua representação gráfica, a fim de compreender o fenômeno representado.

Tabela 1: Esboço das propriedades da função $y = \text{sen } x$ no domínio de $[0, 2\pi]$.

| Unidades básicas simbólicas | | Unidades básicas gráficas | | |
|-----------------------------|--|---------------------------|-----------------------------------|-----------------|
| $TVI(x)$ | Valor de x | Reta tangente | Ponto crítico | Esboço da curva |
| > 0 | $0 < x < \pi/2$ $3\pi/2 < x < 2\pi$ | Crescente | Mínimo absoluto em $(3\pi/2, -1)$ | |
| $= 0$ | $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$ | Constante | Máximo absoluto em $(\pi/2, 1)$ | |
| < 0 | $\pi/2 < x < 3\pi/2$ | Decrescente | | |

Fonte: Pasa (2017. p. 152).



5 Conclusão

As dificuldades no esboço e interpretação de curvas são ainda maiores quando se tratam de funções trigonométricas, visto que é necessário, além do conhecimento de representações semióticas distintas, a compreensão do círculo trigonométrico e de seus parâmetros. A noção do infinitésimo é abordada com o intuito de esboçar a curva e de melhorar a compreensão dos estudantes no que tange à variabilidade da função. O caminho alternativo apresentado, baseado na proposta de Pasa (2017), é importante pois possibilita a coordenação de unidades básicas simbólicas e gráficas, viabilizada pelas taxas de variação instantâneas da função, informações que muitas vezes não ficam claras em abordagens usuais.

A metodologia de esboço de curvas através da taxa de variação, foi desenvolvida para as funções base, seno, cosseno e tangente, como um vislumbre do que pode ser desenvolvido futuramente para as demais expressões algébricas mais complexas. O caminho proposto é condizente com os objetivos do estudo de funções em âmbito de ensino médio e superior, bem como com o que é necessário para que ocorra a aprendizagem, de acordo com a teoria de aprendizagem de Raymond Duval, evidenciando características e propriedades importantes para a compreensão da função e de sua representação.

Referências

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Mércles Thadeu Moretti. *Revemat*, eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 91-112, 2011.

PASA, B. C. *A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma abordagem de interpretação global das propriedades figurais*. 2017. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas e Tecnológica, Florianópolis, 2017.

Palavras-chave: Funções; Infinitésimo; Aprendizagem.

Financiamento: Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS