

LADRILHAMENTO DO PLANO: ESTUDO DE AULA E INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Andressa Pietrowski Kapelinski¹

Luana Mattes Reichert²

Danusa de Lara Bonotto³

INTRODUÇÃO

A dificuldade em compreender as condições necessárias para o encaixe de polígonos regulares é uma problemática comum entre alguns estudantes de matemática, especialmente ao relacionar propriedades geométricas com o conceito de ladrilhamento. Essa questão foi observada em um Componente Curricular - CCr do curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Campus Cerro Largo, no qual a professora do CCr percebeu que os licenciandos apresentaram dificuldades para compreender que, para que polígonos regulares se encaixem perfeitamente formando mosaicos, a soma dos ângulos em torno de um vértice deve ser exatamente 360° .

Para abordar essa problemática, elaborou-se uma proposta pedagógica fundamentada no Estudo de Aula de Richit, Ponte, Tomkelski (2019) e nas Investigações Matemáticas de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005). Durante as atividades, exploraram-se propriedades geométricas como soma dos ângulos internos e externos de polígonos e condições de encaixe. Para tal, o software GeoGebra foi utilizado facilitando o processo de visualização, formulação de conjecturas, realização de testes, produção de justificativas e avaliação. Neste texto apresentamos o relato da experiência vivenciada.

1 METODOLOGIA

O estudo de aula foi realizado no componente curricular de Tendências da Educação Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Campus Cerro Largo, em decorrência de uma dificuldade identificada no componente curricular de Laboratório de Educação Matemática e Docência II.

O estudo de aula consiste em etapas de acordo com Lewis (2002, apud Richit, Ponte, Tomkelski, 2019) organizadas em cinco momentos principais e nos quais os professores trabalham de modo colaborativo: formulação de objetivos para a aula de investigação, planejamento, concretização/lecionação, reflexão e, se desejável, revisão, para quando for necessária uma nova aplicação da aula.

¹ Andressa Pietrowski Kapelinski acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática – 7º Fase/ 2025.1/. Universidade Federal da Fronteira Sul/ Campus Cerro Largo. Andressakapelinski85@gmail.com

² Luana Mattes Reichert acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática - 5º Fase/ 2025.1. Universidade Federal da Fronteira Sul/Campus Cerro Largo. luanamattes92@gmail.com

³ Doutora em Educação em Ciências e Matemática pela PUC/RS. Professora da área de Matemática e do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências da UFFS. danusalb@uffs.edu.br

O objetivo da aula consistiu em favorecer a compreensão da condição de encaixe de polígonos regulares. O planejamento foi realizado considerando as diferentes estratégias para a resolução das atividades, bem como, as dificuldades que os licenciandos poderiam apresentar durante a aula. As atividades foram organizadas com caráter investigativo, utilizando questões adaptadas da OBMEP e o software GeoGebra. A primeira propôs a investigação da soma dos ângulos internos de triângulos e polígonos, visando a construção da fórmula geral. A segunda explorou o encaixe de polígonos regulares em torno de um vértice, analisando combinações que completam 360° . Na terceira, os estudantes usaram o GeoGebra para testar possíveis ladrilhamentos do plano com base nas descobertas anteriores.

A aula foi desenvolvida com 5 licenciandos denominados de LT, LM LJ, LC e LE, a fim de preservar suas identidades. Também foi gravada e transcrita e realizada em dois encontros totalizando 6 horas aula, por duas licenciandas de modo a possibilitar o registro das ações dos alunos sobre as atividades realizadas. Posteriormente se deu o momento de reflexão no qual as licenciandas e professora do CCr analisaram a produção dos licenciandos e refletiram sobre o que foi registrado e observado, buscando identificar indícios de aprendizagem e desenvolvimento do raciocínio geométrico. Isso denota também um movimento de autoformação e desenvolvimento profissional das licenciandas. Durante as discussões são levantados aspectos que poderiam ter sido conduzidos de maneira diferente. Desse modo o planejamento poderia ser modificado e a aula poderia ser novamente implementada para um novo grupo de alunos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E/OU DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Este relato de experiência apresenta uma proposta pedagógica que combina o Estudo de Aula apresentado por Richit, Ponte, Tomkelski (2019) e Bonotto, Gioveli e Scheller (2019) com fundamentos nas Investigações Matemáticas de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), com o objetivo de explorar estratégias que permitam compreender e ensinar a condição de encaixe de polígonos regulares. Além disso, esses conceitos geométricos foram relacionados ao padrão hexagonal das colmeias das abelhas a fim de tornar o aprendizado mais contextualizado.

O Estudo de Aula consiste em uma abordagem de desenvolvimento profissional dos professores, com ênfase na melhoria da aprendizagem dos discentes, perpassando por um ciclo, apresentado na seção anterior, o qual permite aos professores analisarem suas práticas e ajustarem as estratégias de ensino com base em uma investigação colaborativa. De acordo com Bonotto, Gioveli e Scheller (2019), embora exista no Japão há mais de 100 anos, foi a partir do interesse americano pelo LS e, conseqüentemente, com as primeiras produções acadêmicas americanas publicadas tais como Lewis e Tsuchida (1998) e Stigler e Hiebert (1999), que esse processo tem se difundido pelo mundo.

As Investigações Matemáticas consistem em uma abordagem pedagógica que considera

o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro momento inclui a realização de testes e refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (Ponte, Brocardo, Oliveira, 2005, p.20)

De acordo com os autores, investigar na matemática significa colocar o aluno como protagonista, desenvolvendo habilidades como raciocínio crítico, criatividade e resolução de problemas.

Com base nesse contexto, o estudo de aula desenvolvido explorou por meio das investigações matemáticas as propriedades geométricas referentes à soma dos ângulos internos de polígonos e condição de encaixe de polígonos regulares a fim de realizar o ladrilhamento do plano.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A aula teve início com uma contextualização que envolvia perguntas sobre mosaicos presentes no cotidiano, como as colmeias das abelhas, que usam hexágonos para otimizar o espaço e economizar energia. Na sequência apresentamos imagens de mosaicos formados por diferentes polígonos, com o intuito de despertar a curiosidade dos licenciandos, foram realizadas perguntas como: O que vocês observam nestes mosaicos?, Todos os polígonos conseguem se encaixar perfeitamente no plano?, e Por que será que alguns deixam espaços em branco ou se sobrepõem?. Essas perguntas provocaram discussões entre os licenciandos, que inicialmente elaboraram conjecturas baseadas em observações visuais, sem recorrer a justificativas matemáticas formais.

Diante desse contexto inicial e partindo da soma dos ângulos internos de um triângulo, questionamos qual seria a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, esperando que eles respondessem que a soma seria dada por $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$. Entretanto, como nenhum dos licenciandos respondeu de imediato como se calcula a soma dos ângulos internos de um polígono, as professoras mobilizaram a turma a refletir sobre essa questão por meio de questionamentos direcionados. A compreensão do LT, por exemplo, ocorreu por meio da construção de diferentes polígonos no GeoGebra e da medição dos seus ângulos internos. No entanto, ele ainda não havia percebido a regularidade existente entre o número de lados e a soma dos ângulos, como evidenciado Figura 1. Para auxiliar nesse processo, as professoras propuseram que os licenciandos dividissem cada polígono em triângulos, estratégia que contribuiu para a visualização da regularidade esperada, conforme a Figura 1, a seguir.

FIGURA 1 - Registro da tabela do aluno LM

.Preencha a tabela abaixo:

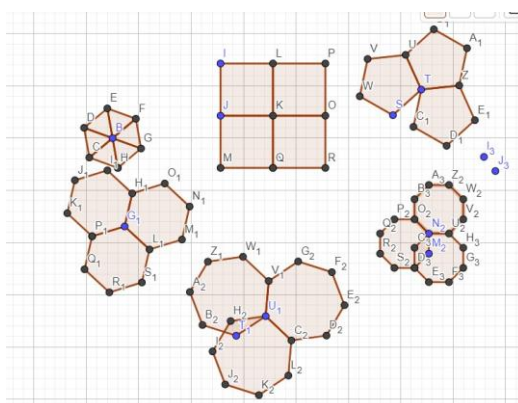
NÚMERO DE LADOS	NOME DO POLÍGONO	nº de triângulos	SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS
3	triângulo	1. 180°	180°
4	quadrilátero	2. 180°	360°
5	pentágono	3. 180°	540°
6	hexágono	4. 180°	720°
7	heptágono	5. 180°	900°
8	octógono	6. 180°	1080°
9	enclógono	7. 180°	1260°
10	decágono	8. 180°	1440°
11	undecágono	9. 180°	1620°
...			
n		$(n-2) \cdot 180$	$180 \cdot n - 360$

Fonte: registro do aluno LM, 2024.

Seguimos então para a Atividade 2, onde os licenciandos exploraram, por meio do GeoGebra, quais combinações de polígonos regulares se encaixam perfeitamente ao redor de um vértice, sem sobreposição. Iniciaram testando triângulos, e em seguida partiram para a exploração de outros polígonos como quadrados, pentágonos e hexágonos. Inicialmente, levantaram hipóteses com base no número de lados dos polígonos, mas tiveram dificuldade em perceber que o encaixe depende da soma dos ângulos internos ao redor de um vértice.

Na sequência, os alunos foram convidados a utilizar o GeoGebra para explorar o encaixe dos polígonos regulares no plano. A interação com o software permitiu a visualização da soma dos ângulos internos e das possibilidades de encaixe dos polígonos, conforme denota a produção do licenciando LM.

FIGURA 2 - Desenvolvimento da Atividade 2: (a), (b), (c), (d), (e), (f) e (g)



Fonte: registro do aluno LM, 2024.

Apesar de a expectativa inicial ser de que essa descoberta acontecesse de forma rápida, os discentes demonstraram dificuldades. As professoras intervieram de modo a favorecer construções que evidenciam que a soma dos ângulos internos dos polígonos em torno de um vértice deveria ser igual a 360° para que o encaixe fosse possível.

Na Atividade 2(h), o desafio era descobrir qual polígono, junto a um triângulo equilátero e um heptágono, completaria o encaixe. Assim foram testadas diferentes opções no GeoGebra. O aluno, LC, adotou a estratégia de tentativa e erro e descobriu que o polígono necessário era um de 42 lados, mas encontrou dificuldade em justificar matematicamente a resposta sem o apoio do software.

Na aula seguinte, deu-se início à Atividade 3, retomando os conceitos de mosaico e ladrilhamento. Os discentes foram orientados a testar, com o GeoGebra, quais polígonos regulares podem cobrir o plano sozinhos, sem sobreposição ou espaços. Concluíram que apenas triângulos equiláteros (6), quadrados (4) e hexágonos regulares (3) podem realizar esse ladrilhamento em torno de um vértice totalizando 360° .

Por meio disso, passaram a buscar combinações entre dois polígonos regulares de até 10 lados que também pudessem ladrilhar o plano. Novamente com tentativas no software, alguns dos estudantes enfrentaram dificuldades de interpretação (como usar três polígonos ao invés de dois), mas com a colaboração entre colegas, foram encontradas várias combinações possíveis.

Em seguida, cada um deles sorteou uma combinação válida para representar visualmente o ladrilhamento com diferentes polígonos regulares na Atividade 3(c). Isso serviu de base para responder à questão 3(d), que investigava se era possível

formar um ladrilhamento com todas as combinações que se encaixam em torno de um vértice.

Durante essa parte, o aluno LE identificou que a combinação de 2 pentágonos com 1 decágono permitia a construção de um mosaico, mas não era possível expandir essa estrutura para ladrilhar todo o plano, pois surgiam sobras entre os polígonos. Essa descoberta foi importante para o entendimento coletivo da diferença entre encaixe pontual e ladrilhamento completo do plano.

CONCLUSÃO

O estudo de aula desenvolvido com fundamentos nas investigações matemáticas possibilitou progressos na compreensão das condições geométricas que permitem o ladrilhamento do plano, especialmente quanto à soma dos ângulos em torno de um vértice. A atividade revelou que os licenciandos tinham dificuldades em compreender as condições necessárias para a construção de um mosaico e ladrilhamento. Embora o planejamento previsse um andamento mais ágil, a atividade demandou mais tempo devido à complexidade percebida pelos alunos.

Foi notado que algumas perguntas e direcionamentos poderiam ter sido melhor formulados, especialmente na parte que tratava do encaixe dos polígonos. A mediação precisaria ter sido adaptada diante das dificuldades, que não haviam sido antecipadas. Outro ponto a melhorar é a captação das aulas: o gravador falhou em registrar falas importantes, prejudicando a análise posterior.

Por outro lado, a estratégia de solicitar registros escritos e explicações sobre o raciocínio dos estudantes foi muito produtiva, permitindo compreender melhor seus processos mentais. Apesar dos desafios, ao final da sequência os licenciandos conseguiram compreender bem os conceitos de mosaico e ladrilhamento. A avaliação realizada pelos próprios alunos reforçou esse resultado: relataram que nunca haviam refletido sobre as condições para o encaixe de polígonos e o preenchimento do plano, e destacaram que o uso do GeoGebra facilitou a visualização e a compreensão dos conceitos.

Por fim, acreditamos que o EA com fundamentos na IM favoreceu a aprendizagem dos licenciandos em relação à problemática percebida pela professora de LEMD II, além de qualificar nossa formação inicial. O movimento de escrita deste texto, também possibilitou vislumbrar possibilidades de articulações entre o ensino e a pesquisa na sala de aula.

REFERÊNCIAS

BONOTTO, D.L.; GIOVELI, I.; SCHELLER, M. Lesson study e formação de professores: um olhar para produções acadêmicas na forma de dissertações e teses. **Revista Educere Et Educare**, Vol. 14, N. 32, mai./ago. 2019.

PONTE, J.P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 1ª ed., 1ª reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RICHIT, A.; PONTE, J.P.; TOMKELSKI, M.L. Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. **Revista brasileira de estudo pedagógicos - RPBE**, Brasília, v. 100, n. 254, p. 54-81, jan./abr. 2019.