

# COMPRIMENTO DA BOBINA ESPIRAL PLANA

Leandro Menezes Pereira

## 1 Introdução

Acondicionar produtos com grandes superfícies em forma de bobina, tem sido uma solução usual e prática, que viabiliza o transporte, armazenamento e o uso. É o caso de lonas plásticas, fitas adesivas, papéis, mantas, esteiras, tecidos...Entretando, surge a dificuldade de determinar quantos metros daquele produto estão enrolados na bobina. O problema foi assunto para uma questão do FUVEST(2019, p. 6) e de discussão no fórum Mathematics Stack Exchange, iniciada por USER266764 (2016): “My mom gave me a roll of toilet paper to put it in the bathroom, and looking at it I immediately wondered about this: is it possible, through very simple math, to calculate (with small error) the total paper length of a toilet roll?”.

Ainda nesse debate, o usuário Steven Alexis Gregory (2016) relata que métodos para estimar o comprimento de materiais enrolados, a partir da contagem de camadas, já são utilizados no setor têxtil.

Particularmente o interesse pelo tema discutido nesse trabalho teve origem em um problema de determinar o comprimento de uma esteira depois de sucessíveis cortes, identificado por um controlador de almoxarifado, como a esteira da Figura 1.

Figura 1: Esteira de PU



Fonte: Elaboração do autor(2026).

Evidentemente é inconveniente medir o comprimento restante. Além disso existe risco de contaminação, já que em muitos casos essas esteiras são usadas em empresas alimen-

tícias e tem contato direto com o produto final. O presente artigo apresenta, um modelo matemático, para mensurar o comprimento de esteiras enroladas. Usando conceitos da geometria euclidiana e a indução matemática, o modelo matemático proposto supõe que os ciclos das curvas espirais e das circunferências(Figuras 2 e 3), têm comprimentos equivalentes. Para tornar o uso desse modelo mais acessível e prático, foi elaborada uma planilha, cujo dados de entrada, são medidas simples efetuadas com trena e paquímetro.

## 2 Metodologia

A metodologia consiste nos seguintes procedimentos:

- 1) Elaboração do modelo matemático.
- 2) Verificação do modelo comparando os resultados obtidos a partir de sua aplicação com os valores reais medidos, de diferentes materiais (esteiras de PU, esteiras metálicas, EVA).

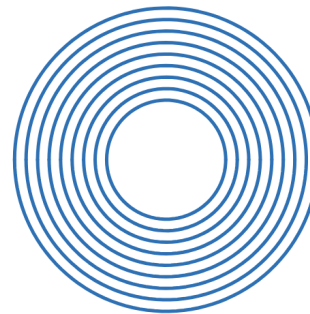
## 3 Modelo matemático: circunferências concêntricas

O comprimento da esteira pode ser entendido como a soma de  $n$  circunferências concêntricas, como mostra a Figura 3.

Figura 2: Representação esteira em forma de espiral



Figura 3: Representação esteira como circunferências concêntricas



Fonte: Elaboração do autor(2026).

Fonte: Elaboração do autor(2026).

O comprimento aproximado da esteira pode ser obtido com a soma das circunferências, conforme a Equação (1)

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i \quad (1)$$

onde  $C$  é o comprimento total da esteira de  $n$  voltas e  $C_i$  são os comprimentos das circunferências. Assim, substituindo as circunferências com seus respectivos raios, tem-se a Equação (2).

$$C = 2\pi r_1 + 2\pi(r_1 + e) + 2\pi[(r_1 + e) + e] + \dots + 2\pi[r_1 + (n - 1)e] \quad (2)$$

Onde  $n$  é a última circunferência e  $e$  é a espessura da esteira.

Simplificando a Equação (2) chega-se às Equações (3) e (4).

$$C = 2\pi[r_1 + (r_1 + e) + (r_1 + 2e) + \dots + r_1(n - 1)e] \quad (3)$$

$$C = 2\pi[nr_1 + e + 2e + 3e + \dots + (n - 1)e] \quad (4)$$

A Equação (4) pode ser reescrita na Equação (5):

$$C = 2\pi[nr_1 + e(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1)] \quad (5)$$

A expressão com  $e$  é uma progressão aritmética que descreve a soma de  $(n - 1)$  inteiros, o que segundo IEZZI(2013) é  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Aplicando esse teorema, e substituindo-o na Equação (5) obtém-se a Equação (6).

$$C = 2\pi[nr_1 + e\frac{(n^2 - n)}{2}] \quad (6)$$

A Equação (6) já é suficiente para determinar o comprimento de uma esteira. Porém  $n$  pode ser difícil de determinar com precisão. Como as esteiras muitas vezes possuem a espessura muito pequena, é difícil contar o número de circunferências. Isso pode ser solucionado com as Equações (7) e (8).

$$r_n - r_1 = n \cdot e \quad (7)$$

$$n = \frac{r_n - r_1}{e} \quad (8)$$

Substituindo a Equação (8) na Equação (6) tem-se a equação (9).

$$C = 2\pi\left[\frac{r_n - r_1}{e}r_1 + e\frac{\left(\frac{r_n - r_1}{e}\right)^2 - \frac{r_n - r_1}{e}}{2}\right] \quad (9)$$

Por fim, obtém-se a Equação (10):

$$C = \frac{2(r_n r_1 - r_1^2)(r_n - r_1)^2 - e(r_n - r_1)}{e} \pi \quad (10)$$

A Equação (10) relaciona o comprimento de uma esteira com o raio da primeira circunferência, o raio da última circunferência e a espessura da esteira. Coletando dados de diferentes esteiras e materiais, foi elaborada a Tabela 1.

Tabela 1: Comparação entre valores medidos e calculados

ITEM	C(MEDIDO)	C(FÓRMULA)	$D_n$	$D_1$	$e$	ERRO PERCENTUAL
EVA	555 mm	507,9562622 mm	54 mm	47,5 mm	1 mm	8,48%
EVA M	555 mm	518,3627878 mm	85,5 mm	81,5 mm	1 mm	6,60%
EVA G	555 mm	530,1437603 mm	115 mm	112 mm	1 mm	4,48%
ESTEIRA PU 50M	50000 mm	49970,17275 mm	308 mm	176 mm	1 mm	0,06%
ESTEIRA PU 30M	30000 mm	31227,43098 mm	248 mm	35 mm	1,5 mm	4,09%
ESTEIRA PU	4545 mm	4506,091063 mm	180 mm	154 mm	1,5 mm	0,86%
ESTEIRA METÁLICA	2200 mm	1887,049987 mm	90 mm	22 mm	3 mm	14,23%
MANTA POLIPEX ALUMIZADA	2685 mm	3026,482735 mm	190 mm	142,5 mm	4 mm	12,72%

Fonte: Elaboração do autor(2026).

Da tabela, é possível observar:

- O **material da bobina** exerce influência significativa sobre o erro observado, indicando que as propriedades físicas do material afetam a precisão do modelo adotado.
- A **diferença entre os diâmetros** ( $D_n - D_1$ ) apresenta relação direta com o erro percentual, sugerindo que variações maiores nessa grandeza tendem a intensificar as discrepâncias entre os valores medidos e calculados.
- O **comprimento total da bobina** pode influenciar indiretamente o erro, uma vez que está associado ao aumento da diferença entre os diâmetros, o que, conforme discutido anteriormente, impacta diretamente no erro percentual.
- A **espessura do material** ( $e$ ) também se mostra um fator relevante, afetando diretamente o erro, possivelmente devido ao seu papel na determinação do número de circunferências.

## 4 Considerações finais

Sobre a precisão das medidas dos dados de entrada: o modelo depende da precisão das medidas dos diâmetros da bobina e da espessura da esteira. Pequenos erros nessas medidas comprometem a estimativa do comprimento da bobina.

Sobre a influência da espessura da manta ( $e$ ): os dados da Tabela 1 evidenciam que o modelo tende a apresentar maiores erros para  $e > 1,5\text{mm}$ , portanto recomenda-se sua aplicação para mantas com até 1,5mm de espessura. Esta limitação deve-se à hipótese inicial do modelo, que considera os comprimentos de circunferências e espirais semelhantes.

Sobre a composição da bobina: os resultados indicam uma correlação entre a deformabilidade do material e o aumento do erro percentual. Materiais mais flexíveis ou compressíveis tendem a se ajustar de maneira não ideal ao modelo geométrico proposto, o que introduz discrepâncias entre os valores teóricos e experimentais.

Por fim, para fins de controle de estoque de esteiras de PU, o modelo mostra-se funcional, fornecendo estimativas confiáveis, desde que a espessura da esteira não ultrapasse 1,5mm.

## 5 Referências

### Referências

- [1] FUNDAÇÃO UNIVERSITÁRIA PARA O VESTIBULAR. **FUVEST 2020: prova de conhecimentos gerais – 1ª fase (Prova V)**. São Paulo, 2019. Questão 15. Disponível em: [https://www.fuvest.br/wp-content/uploads/fuvest\\_2020\\_primeira\\_fase\\_prova\\_V.pdf](https://www.fuvest.br/wp-content/uploads/fuvest_2020_primeira_fase_prova_V.pdf). Acesso em: 10 abr. 2026.
- [2] USER266764. Calculating the length of the paper on a toilet paper roll. **Mathematics Stack Exchange**, 2016. Disponível em: <https://math.stackexchange.com/questions/1633704/calculating-the-length-of-the-paper-on-a-toilet-paper-roll>. Acesso em: 10 abr. 2026.
- [3] GREGORY, Steven Alexis. Resposta em: Calculating the length of the paper on a toilet paper roll. **Mathematics Stack Exchange**, 2016. Disponível em: <https://math.stackexchange.com/questions/1633704/calculating-the-length-of-the-paper-on-a-toilet-paper-roll>. Acesso em: 10 abr. 2026.
- [4] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: volume 4 – sequências, matrizes e determinantes**. São Paulo: Atual, 2013. Disponível em: <https://barbosadejesu.wpcomstaging.com/wp-content/uploads/2021/09/fundamentos-da-matematica-elementar-4.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2026.