UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
UFFS
CAMPUS CHAPECÓ
Curso de Matemática Licenciatura
IX SAMAT
Semana Acadêmica de Matemática
05 a 08/maio/2026

ÁREAS DE TERRENOS E LAVOURAS: Métodos de cálculo e significação de conceitos matemáticos

Pedro Augusto Pereira Borges[1]

Palavras-chave: Trigonometria, Áreas de polígonos, Medições de áreas, Teodolito artesanal. Áreas e determinantes.

1. Introdução

A medição de áreas urbanas ou rurais com formas geométricas irregulares (terrenos e lavouras) é uma atividade profissional de topógrafos e engenheiros, cuja importância situa-se nos aspectos legais – certidão registro de imóveis e escrituras - e técnicos operacionais, como a marcação de obras, projetos urbanos, mapas, gestão e financiamentos para o plantio.

As ações praticadas em campo são medições de comprimentos (distâncias entre dois pontos) e ângulos horizontais e verticais. Os conceitos matemáticos utilizados para a solução dos problemas de cálculo de distâncias e áreas, são parte da geometria ensinada na Escola Básica (Sistemas de Medidas, Semelhança de Triângulos, Polígonos, Trigonometria e Geometria Analítica) e contextualizá-los com topografia, significa criar oportunidades promissoras de justificação técnica e cultural.

No entanto, algumas adaptações são necessárias. Os equipamentos profissionais as trenas (físicas ou a laser) e o teodolito para medida dos ângulos, têm um custo inviável para uso escolar. Por isso, para medidas de terrenos e pequenas áreas, podem ser utilizadas trenas domésticas e teodolitos artesanais[2], estes construídos com materiais simples e de baixo custo. Publicações com sugestões de construção de teodolitos artesanais, instruções para levantamentos topográficos e propostas pedagógicas com topografia, mostram a pertinência dessa alternativa de contextualização da matemática escolar. Em Almeida e Vieira (2013) as autoras discutem o uso de materiais didáticos no ensino da Matemática, particularmente no uso do teodolito para medir ângulos verticais e calcular distâncias horizontais. Rech, Seidel e Dias (2025) desenvolveram um produto educacional no qual, orientam a construção do teodolito artesanal, propõem medições de alturas integradas com atividades de ensino de trigonometria, avaliação e reflexão. Salgado e Rosa (2025) contam a história da evolução tecnológica do teodolito e o utilizam para estimar medidas de altura a pontos inacessíveis. Magalhães, Magalhães e Lima (2020) orientam detalhadamente a construção de um teodolito artesanal, calculam a área de um polígono de cinco lados através do método de divisão em triângulos, empregando a Lei dos Cossenos para determinar os lados dos triângulos (não medidos) internos ao polígono. Martins, Nobre e Chaves (2014) construíram um teodolito artesanal e o utilizam para estimar alturas em paredes da escola. Ramos e Adames (2021) elaboraram um manual de uso do teodolito em sala de aula, com exposições detalhadas do Teorema de Tales,

1 UFFS, Doutor em Engenharia Mecânica. *Campus de Chapecó.* Email: pedro.borges@uffs.edu.br
2 Os teodolitos escolares têm sido chamados de artesanais (Rech, Seidel e Dias (2025), didático (Ramos e Adames, 2021) ou rudimentar (Belter, Silva, Poersch, Schulz, Weber, 2020). Neste trabalho, é usado o termo teodolito artesanal, ou apenas teodolito.

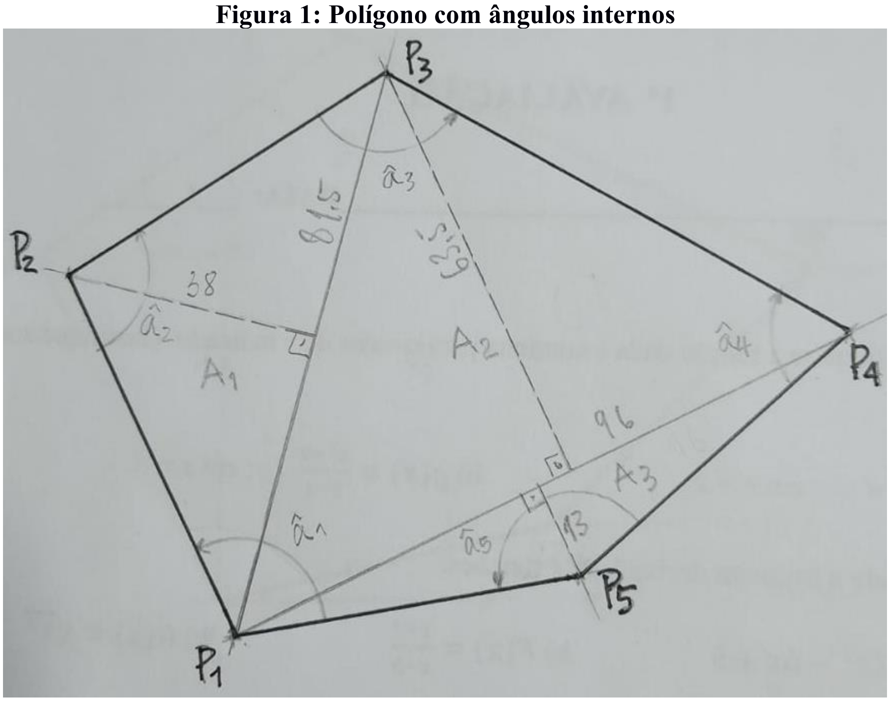
Semelhança de Triângulos, Razões Trigonométricas, Teorema de Pitágoras, Lei dos Senos, Lei dos Cossenos e o Teorema de Heron, seguidas de aplicações práticas de topografia, questões de provas (vestibulares), proposição de atividades práticas para os estudantes.

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo mostrar os procedimentos, conceitos matemáticos e limitações e potencialidades de três métodos de cálculo de áreas de regiões planas usuais em topografia e discutir possibilidades de executá-los em aulas de Matemática.

2. Área de lavouras: polígono de cinco lados

Propriedades rurais (lavouras), em regra, não tem contornos regulares, nem todos os lados retos, pois podem ser limitadas por riachos, estradas, banhados, etc. Para medir suas áreas, é usual na topografia, delimitar uma região poligonal, com contorno acessível e calcular a área externa a essa região (área extra-poligonal), como uma soma de trapézios, semelhante ao processo de integração pela primeira Regra de Simpson, ensinada nas aulas de Cálculo Numérico, nas licenciaturas em Matemática. O cálculo da área da região poligonal pode ser executado com diferentes métodos. Neste trabalho, três métodos serão apresentados e comentados, quanto a praticidade e precisão: Método de Escala, Método Trigonométrico e Método Analítico[3].

Figura 1: Polígono com ângulos internos



Fonte: elaborado pelo autor (2026)

[3] A escolha do nome dos métodos deve-se aos principais conceitos empregados: Método de Escala, porque os dados são obtidos pelo desenho em escala; Método Trigonométrico, porque são usadas várias relações trigonométricas e Método Analítico, porque envolve conceitos da Geometria Analítica.

O desenho de uma lavoura com limites retos, na forma de um polígono irregular de cinco lados é mostrado na Figura 1, como exemplo para o cálculo de áreas de figuras planas, pelos Métodos de Escala e Geométrico. Para esses métodos, é necessário medir os lados (distâncias entre vértices consecutivos) e os ângulos internos em campo, usando trenas e um teodolito, respectivamente. Neste trabalho, porém, essas grandezas foram medidas no desenho, com régua (escala 1:100) e com transferidor. Esses dados são apresentados na 4ª e 5ª colunas da Tabela 1.

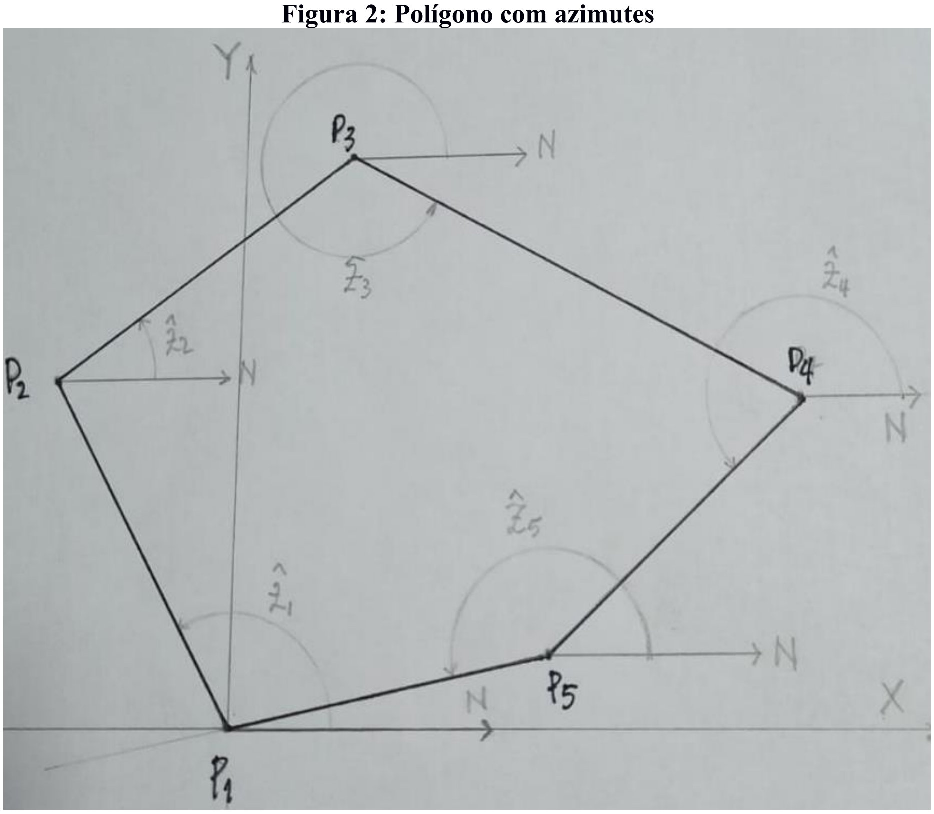
Tabela 1 – Dados obtidos por medições

P_i	P_{i+1}	Azimute (º)	Lados (m)	Ângulos internos, $\hat{a}_i$ (º)
P_1	P_2	120	55,6	109
P_2	P_3	35,5	56	93,5
P_3	P_4	331,4	76,5	117,5
P_4	P_5	222	51,5	70
P_5	P_1	191,9	47,5	150

Fonte: elaborado pelo autor (2026)

Na Figura 2, é mostrado o mesmo polígono da Figura 1, porém com a indicação das medidas dos ângulos que cada lado faz com a orientação Norte (N), no sentido anti-horário, ângulos esses chamados de azimutes, disponíveis na 3ª coluna da Tabela 1, que serão usados no Método Analítico do cálculo de áreas.

Figura 2: Polígono com azimutes



Fonte: elaborado pelo autor (2026)

Método de Escala

O Método de Escala consiste em:

i) Desenhar a lavoura em escala utilizando as informações dos ângulos internos e das medidas dos lados, como mostrado na Figura 1;
ii) Dividir a área em triângulos. Nesse caso, foram escolhidos os triângulos T1: $P_1P_2P_3$, T2: $P_1P_3P_4$ e T3: $P_1P_4P_5$. Outras alternativas são possíveis;
iii) Escolher e medir uma base de cada triângulo. Nesse caso, foram escolhidas as bases P_1P_3 para o triângulo T1 e P_1P_4 para os triângulos T2 e T3.
iv) Marcar a posição das alturas h_1, h_2 e h_3 relativas às bases escolhidas;
v) Calcular as áreas de cada triângulo, através da Equação (1).

$$A_i = \frac{1}{2}\, b_i \cdot h_i \qquad \text{com } i = 1,2 \text{ e } 3. \tag{1}$$

vi) A área total é obtida através da soma das áreas de todos os triângulos, pela Equação (2).

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 \tag{2}$$

O Método de Escala é empírico, visual e requer conceitos de geometria e desenho ensinados no Ensino Fundamental I. Sua principal limitação é a precisão, já que depende da qualidade das medições em desenho das bases e alturas dos triângulos. Por esse motivo, é mais usado apenas como referência, na comparação com os outros métodos.

Método Trigonométrico

Dividindo a lavoura em triângulos (Figura 1), como no Método de Escala, calcula-se as áreas dos triângulos T1 e T3 pela Equação (3)[4], já que são conhecidos dois lados e o ângulo entre esses lados.

$$A_1 = \frac{1}{2}\, \overline{P_2P_1} \cdot \overline{P_2P_3}\, sen\, \hat{A}_2 \;\text{ e }\; A_3 = \frac{1}{2}\, \overline{P_5P_4} \cdot \overline{P_5P_1}\, sen\, \hat{A}_5 \tag{3}$$

onde *A1 e A2* são as áreas dos triângulos, $\overline{P_iP_j}$ são as distâncias (lados) entre os pontos indicados e $\hat{A}$ é o ângulo entre os lados.

Usando a Lei dos Cossenos (Eq. 4), pode-se calcular as distâncias $\overline{P_1P_3}$ e $\overline{P_1P_4}$ do triângulo T2, com as Eqs. (4), respectivamente.

$$\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 - 2 \cdot \overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_2P_3} \cdot \cos \hat{A}_2$$

$$\overline{P_1P_4}^2 = \overline{P_1P_5}^2 + \overline{P_4P_5}^2 - 2 \cdot \overline{P_1P_5} \cdot \overline{P_4P_5} \cdot \cos \hat{A}_2 \tag{4}$$

[4] A Equação (3) é demonstrada a partir da Lei dos Cossenos e ensinada no Ensino Médio.

Com esses lados pode-se calcular a área do triângulo T2 através da Fórmula de Heron (Equação (5)), já que P_3P_4 é um lado medido do polígono.

$$A_2 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{5}$$

onde a, b e c são os lados do triângulo T2 e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semi-perímetro. A demonstração da fórmula de Heron pode ser encontrada em Ramos e Adames, (2021, p. 59).

O Método Trigonométrico é eficiente para calcular a área de polígonos com cinco lados, mas torna-se demasiadamente trabalhoso para polígonos com mais lados, pelas sucessivas aplicações da Lei dos Cossenos na determinação das medidas dos ângulos gerados pelas diagonais.

Método Analítico

Se as coordenadas dos vértices $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$ e $P_3=(x_3,y_3)$ de um triângulo qualquer forem conhecidas, a área desse triângulo pode ser calculada com o determinante da matriz da Equação (6)[5].

$$A_1 = det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= (x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_3) - (x_3 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_1) \tag{6}$$

Para aplicar o Método Analítico no cálculo da área da lavoura da Figura 1, são necessárias as medidas dos lados e também dos azimutes ($\hat{Z}_i$), indicados na Figura 2 e disponíveis na Tabela 1, para o exemplo resolvido. Com esses dados, calcula-se as coordenadas dos vértices dos triângulos com as Equações (7), adotando $P_1 = (0,0)$ como a origem do sistema cartesiano.

$$x_{i+1} = x_i + \overline{P_iP_{i+1}}\cos(\hat{Z}_i) \quad \text{e} \quad y_{i+1} = y_i + \overline{P_iP_{i+1}}\,sen(\hat{Z}_i) \tag{7}$$

para $i = 1,2,3$ e 4.

Particularmente, se os dados medidos estiverem totalmente corretos, as identidades da Equação (8) serão verdadeiras[6].

$$x_1 = x_5 + \overline{P_5P_1}\cos(\widehat{Z_5}) = 0 \quad \text{e} \quad y_1 = y_5 + \overline{P_5P_1}\,sen(\widehat{Z_5}) = 0 \tag{8}$$

A área total pode ser dividida em três triângulos: T1: $P_1P_2P_3$, T2: $P_1P_3P_4$ e T3:

5 Em ZERBINATTI (2015, p. 59) e BIANCHINI, PACOLA (1989, p. 60), encontra-se a demonstração da fórmula do cálculo da área de polígonos por determinantes e exemplos de aplicação.

6 Mesmo com teodolitos e trenas profissionais e pessoal treinado, ocorrem erros de medida. As Equações (8) podem ser utilizadas para dimensionar esses erros.

$P_1P_4P_5$, com as respectivas áreas calculadas, adaptando-se à Equação (6). Evidentemente, a área total da lavoura será a soma das áreas de cada triângulo, como nos outros métodos.

O Método Analítico pode-se ser programado em planilhas ou programas computacionais para o cálculo de áreas de polígonos de muitos lados (mais de 100), como é o caso de lavouras ou terrenos grandes e irregulares. O conhecimento das razões trigonométricas, ângulos em retas paralelas cortadas por transversais, matrizes e determinantes são suficientes para entender e aplicar o Método Analítico no Ensino Médio.

3. Resultados

A 2ª coluna da Tabela 2 apresenta os resultados do cálculo da área do polígono da Figura 1, pelos três métodos. A 3ª coluna mostra as diferenças dos métodos em relação ao Método Analítico e a 4ª coluna, mostra as mesmas diferenças em percentuais. Pode-se observar que as diferenças são menores do que 1%, o que indica a coerência entre os métodos.

Os únicos dados de campo utilizados pelos três métodos são os lados do polígono. Os demais dados são obtidas de modos diferentes. No Método das Escalas as distâncias P_1P_3 (*81 m*) e P_1P_4 (*96 m*) e as alturas dos triângulos são medidas no desenho, enquanto que no Método Trigonométrico são calculadas pela Lei dos cossenos (*81,28 m* e *95,63 m*, respectivamente), apresentando valores ligeiramente diferentes. O Método Analítico usa apenas as medidas dos lados e os azimutes para calcular as coordenadas dos vértices. Assim, a diversidade das fontes de dados explica as diferenças entre as áreas calculadas para o polígono. Mesmo assim, tais diferenças não são significativas (menores do que 1%) de acordo com a terceira coluna da Tabela 2, considerando as limitações das medidas efetuadas em desenho.

Tabela 2 – Áreas do polígono calculadas pelos três métodos

Métodos	**Áreas (m^2)**	**Diferença c/ Método Analítico (m^2)**	**Diferença %**
Escala	5187,00	18,19	0,34
Geométrico	5162,26	42,93	0,82
Analítico	5205,19	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados indicam que os três métodos são coerentes entre si e podem ser utilizados simultaneamente, para conferir erros de passos intermediários e, principalmente, como referência para avaliar o resultado final, sobre a área do polígono.

4. Considerações finais

A medição de áreas reais em campo pode ser explorada em diferentes anos escolares, para dar significado real aos conceitos matemáticos, desde que adaptadas ao estágio de conhecimento matemático dos alunos. Medidas de ângulos com teodolitos são atividades que desenvolvem habilidades de medidas com transferidor, de modo prático e complementar aos tradicionais exercícios de livros. O Método de Escala pode ser praticado no Ensino Fundamental I, pois necessita apenas de noções de medidas de distâncias e ângulos, escala e áreas de triângulos. O Método Trigonométrico é uma excelente aplicação das relações métricas de triângulos quaisquer e Lei dos Cossenos, portanto adequado para o Ensino Médio. O Método Analítico, por sua vez, utiliza o Plano Cartesiano, as razões trigonométricas e matrizes, portanto, adequado para o Ensino Médio e/ou Superior.

A didática da aplicação desses métodos em classe escolar pode variar, de acordo com os objetivos do professor. Em uma abordagem mais técnica, o ensino e treinamento dos procedimentos de medida e cálculo levarão os alunos a capacitarem-se a calcular áreas de terras, o que pode ser interessante para escolas profissionalizantes de agronomia, por exemplo. A proposição de verificação e dedução das propriedades dos polígonos e/ou de fórmulas de geometria (como por exemplo, das Equações 7 e 8) é uma abordagem de investigações matemáticas. Mas isso, é assunto para trabalhos futuros.

5. Referências

ALMEIDA, Dionara Freire de; VIEIRA, Andrea Cristina. Utilizando o teodolito no ensino da trigonometria. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, ENEM, 11, 2014, Curitiba, Brasil, **Anais** ... Curitiba: PR, Brasil, 18- 21 jul. 2013, p.1-9.

BELTER, Andreia, SILVA; Julia Gabriela Petrazzini; POERSCH, Kelly Gabriela; SCHULZ, Julhane Alice Thomas; WEBER, Elizangela. O uso do teodolito no estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo. **Revista Insignare Scientia**. Vol. 3, n. 5. Set/dez, 2020.

BIANCHINI, Edwaldo; PACOLA, Herval. **Matemática 3**. São Paulo: Moderna, 1989.

MAGALHÃES, Américo Garcia Freire; MAGALHÃES, Américo Garcia Freire; LIMA, Kedna Magalhães. **Manual de Construção e Utilização de Equipamentos Topográficos Agrícolas Alternativos**. Juazeiro-BA: Universidade Federal do Vale do São Francisco. 2020.

MARTINS, Josiane; NOBRE, Jaciara Lopes de Lopes; CHAVES, Aniele Torma da Silva. Ensinando trigonometria com o auxílio do teodolito. In: Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, EREMATSUL, 20., 2014, Bagé, Brasil, **Anais ...** Bagé: RS, Brasil, 13-16 nov. 2014, p. 618-623.

RECH, Fábio; SEIDEL, Chiara Maria; DIAS, Luciano. Investigação trigonométrica: a construção e utilização do teodolito artesanal no ensino médio. 2015. 18f. Produto Educacional – PROFMAT, Universidade do Estado de Mato Grosso “Carlos Alberto Reyes Maldonado” (UNEMAT), SINOP, MT, 2025.

SALGADO, Sara Carolayne Mendonça; ROSA, Marcos Andrey.;. O uso do teodolito no ensino de trigonometria: uma proposta utilizando abordagem histórica. **RHMP, Revista História da Matemática para Professores**. Natal (RN), v.11, p.1-10, 2025.

RAMOS, Cassiano Henrique Monteiro Corrêa; ADAMES, Márcio Rostirolla. **Manual do uso do teodolito nas aulas de matemática** [livro eletrônico].1ª ed. Curitiba, PR: Ed. dos Autores, 2021.

ZERBINATTI, Paulo Henrique. Áreas de Polígonos via Determinantes. 2015. 64 f. Dissertação (Mestrado, PROFMAT) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (SP), 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=1234&id1=2034. Acesso em 08 abr 2016.