

O ENSINO DE DERIVADAS COM TECNOLOGIAS DIGITAIS:

Uma proposta com o uso do GeoGebra

Anna Karolina Boller Leal¹

Emelly Marchiori²

Rosane Rossato Binotto³

Vítor José Petry⁴

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Tecnologias Digitais. Objetos Virtuais de Aprendizagem. Derivada.

1. Introdução

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), além de ser imprescindível para se estudar qualquer curso de Ciências Exatas pela sua grande aplicabilidade em economia, engenharia, computação, estatística, entre diversas outras áreas (Araujo, 2021; Brasil, 2001), é um dos principais desafios e causas que levam à evasão por parte dos estudantes. O primeiro contato com a disciplina costuma trazer um elevado grau de dificuldades oriundas, frequentemente, da falta de conhecimentos prévios ou da pouca compreensão do que se está tentando ensinar. Os conceitos matemáticos geralmente apresentados em aula necessitam de um nível de abstração que os estudantes não estão familiarizados, principalmente com a conceituação e a prova de teoremas com o uso da linguagem matemática formal, que é pouco ou nada trabalhada na Educação Básica (Rosa, Alvarenga e Santos, 2018; Trevisan e Mendes, 2018).

A falta do conhecimento matemático necessário para se aprender os conceitos de CDI é resultado direto da metodologia de ensino utilizada na Educação Básica e da metodologia utilizada pelo professor de CDI no Ensino Superior (Rosa, Alvarenga e Santos, 2018). Ao ingressar num curso de Ciências Exatas, o aluno espera, desde o início, uma continuidade metodológica utilizada na Educação Básica, tais como, aulas expositivas, mecanização da resolução de problemas e da falta do caráter investigativo nas aulas (Brasil, 2001; Rosa, Alvarenga e Santos, 2018; Trevisan e Mendes, 2018). Segundo esses autores, a maior dificuldade do aluno é a visualização dos “porquê’s” da Matemática, não compreendendo a fundo seu conceito formal e focando apenas na resolução de exercícios sem qualquer caráter investigativo. Considerando todas essas circunstâncias, Trevisan e Mendes (2018), alertam para a importância da existência de

¹ Universidade Federal da Fronteira Sul, Graduanda em Licenciatura em Matemática. Campus Chapecó. E-mail: anna.leal@estudante.uffs.edu.br.

² Universidade Federal da Fronteira Sul, Graduanda em Licenciatura em Matemática. Campus Chapecó. E-mail: emelly.marchiori@estudante.uffs.edu.br

³ Universidade Federal da Fronteira Sul, Doutora em Matemática pela UNICAMP, 2008. Campus Chapecó. E-mail: rosane.binotto@uffs.edu.br.

⁴ Universidade Federal da Fronteira Sul, Doutor em Matemática Aplicada pela UFRGS, 2007. Campus Chapecó. E-mail: vitor.petry@uffs.edu.br.

uma disciplina de Pré-Cálculo, que aborde os conceitos de funções, polinômios e manipulação aritmética.

O CDI, em particular o estudo de derivadas, tópico principal deste trabalho, está diretamente ligado ao estudo de funções. A derivada pode ser compreendida como a taxa de variação instantânea de uma função ou, também, como a inclinação da reta tangente à função em um ponto (Araujo, 2021). Utilizando-se as Tecnologias Digitais (TD) é possível visualizar o comportamento geométrico da derivada em qualquer função diferenciável que se queira, bem como trabalhar suas concepções algébricas e resultados numéricos aplicados em pontos específicos.

Considerando o exposto, os autores deste trabalho investigam propostas de ensino de conceitos do CDI utilizando as TD. Para Lima e Rocha (2022, p. 730):

[...] o uso das tecnologias digitais pode contribuir para melhor compreensão a partir de aplicações que fazem sentido para o aluno, pois consegue ver algo concreto relacionado ao assunto ensinado pelo professor.

O *software* utilizado neste trabalho é o GeoGebra, por se tratar de um aplicativo simples de trabalhar, gratuito e acessível via internet, sem a necessidade de realizar qualquer download. Por meio desse *software*, foram construídos objetos virtuais de aprendizagem (OVA) com ferramentas interativas e didáticas para auxiliar o professor de CDI a mostrar os conceitos dessa disciplina de forma visual e dinâmica. Segundo Perfetto e Albuquerque (2018, p. 41) um OVA “pode ser entendido como todo objeto que pode ser utilizado como um elemento didático para o aprendizado”. Para os autores, “um OVA interativo é aquele que permite que o aluno se aproprie de informações, reflita e seja ativo no seu processo de aprendizagem” (Perfetto e Albuquerque, 2018, p. 43).

Neste trabalho, são apresentados alguns dos OVA construídos até o presente momento para o ensino e a aprendizagem dos conceitos iniciais sobre derivada de uma função, tratando da representação geométrica da reta tangente a uma curva em um ponto e a interpretação geométrica da derivada. Além disso, realiza-se uma análise de possibilidades e potencialidades da utilização desses objetos no estudo de CDI, por meio de um exercício de imaginação pedagógica (IP), na perspectiva proposta por Skovsmose (2015). Segundo o autor, “situações imaginadas podem incluir esperanças e aspirações educacionais” (Skovsmose, 2015, p. 74). Dessa maneira, a IP “pode sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis” (Skovsmose, 2015, p. 76).

2. Metodologia

A presente pesquisa possui abordagem qualitativa propositiva, visto que é fundamentada na análise e no desenvolvimento de propostas voltadas ao ensino de Matemática com apoio das TD. Conforme Garnica (2001, p. 41), “a preponderância dos processos indutivos, a predominância de dados descritivos, a ênfase ao processo em detrimento do produto [...] são, segundo pensamos, elementos reguladores centrais em uma pesquisa qualitativa”.

Em um projeto de monitoria e outro de Iniciação Científica que as duas primeiras autoras, integram, respectivamente, já foram desenvolvidos diversos OVA no *software* GeoGebra para o ensino de CDI. Para este trabalho, realizou-se um recorte do *corpus* da pesquisa, delimitando-o para dois desses OVA, relacionados ao conceito de derivada. Neste trabalho, apresenta-se esses objetos e realiza-se uma análise, em que se buscou investigar as possibilidades e potencialidades do material elaborado, a partir do exercício de IP, considerando as percepções dos autores do trabalho sobre as possíveis interações dos estudantes com o material.

Como já mencionado, a escolha pelo uso do GeoGebra ocorreu pela facilidade de acesso, sendo um programa que pode ser utilizado pelo navegador web, por aplicativo de celular, disponível em Android e IOS. Segundo a descrição dada pelo próprio site do GeoGebra (2025):

GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino, que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um único motor. Além disso, o GeoGebra oferece uma plataforma *online* com mais de 1 milhão de recursos de sala de aula gratuitos criados por nossa comunidade multilíngue. [...] O mecanismo matemático do GeoGebra alimenta centenas de sites educacionais em todo o mundo de diferentes maneiras, desde simples demonstrações até sistemas completos de avaliação on-line.

O GeoGebra auxilia na aula proposta pelo professor, permitindo monitorar o desenvolvimento de atividades dos estudantes no *software* em tempo real, por meio da plataforma GeoGebra *Classroom* (GeoGebra, 2025). Além disso, possui ferramentas fáceis de usar e que permitem que todos os usuários da plataforma consigam desenvolver seus próprios objetos da maneira que desejarem. Então, além da possibilidade de manipulação dos OVA desenvolvidos pelos seus docentes, os estudantes podem construir seus próprios objetos e, além de desenvolverem o seu conhecimento matemático, também desenvolvem o pensamento computacional.

3. Objetos construídos

Com o OVA 1, apresentado na Figura 1, busca-se abordar conceitos relacionados à inclinação da reta tangente à uma curva em um ponto dado. Para isso, o OVA é dividido em duas janelas, de modo que, na primeira (à esquerda) são apresentados pequenos textos e as representações algébricas, e na segunda (à direita) é exibida a representação gráfica da situação analisada. No OVA 1, a curva que representa o gráfico da função f é definida para uma função arbitrária $y = f(x)$, de modo que a lei de formação não é apresentada. A questão inicial é como encontrar a reta tangente a essa curva no ponto $P = (a, f(a))$. Para obter a equação de uma reta pode-se, primeiramente, encontrar a sua inclinação m . Neste caso, só há um ponto, e para calcular a inclinação são necessários dois pontos. Assim, considera-se um ponto “próximo” $Q = (x, f(x))$, em que $x \neq a$, tornando possível o cálculo da inclinação da reta secante PQ , dada por $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Após essa etapa, o estudante é instruído a movimentar o ponto Q no gráfico, fazendo-o aproximar-se de P ao longo da curva. O

objetivo é perceber que ao fazer isso, a inclinação da reta secante PQ tende a um número m , que é justamente a inclinação da reta tangente no ponto P . Assim, a reta tangente à curva no ponto $P = (a, f(a))$ é aquela que passa por P e tem inclinação $m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, desde que esse limite exista (Stewart, 2011, p. 130).

Figura 1 - OVA 1 - Reta tangente à uma curva em um ponto

RETA TANGENTE A UMA CURVA EM UM PONTO

Seja f uma curva definida por uma função $y=f(x)$.

Como encontrar a reta tangente a curva no ponto $P=(a, f(a))$?

Para encontrarmos a reta tangente a curva, passando pelo ponto P , podemos considerar um ponto próximo $Q=(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ .

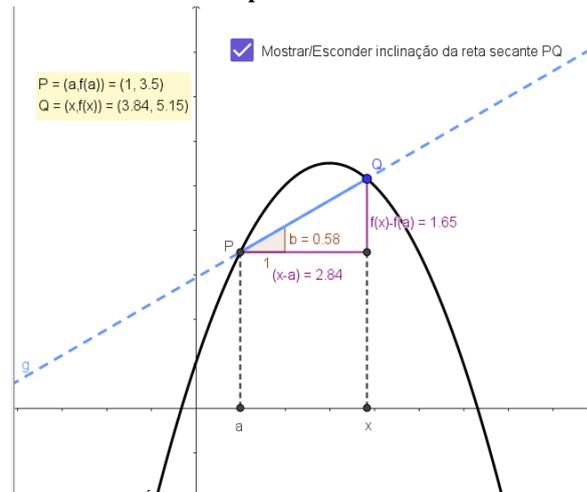
A inclinação da reta secante é dada por :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad m_{PQ} = \frac{5.15 - 3.5}{3.84 - 1} = \frac{1.65}{2.84} = 0.58$$

Movimente o ponto Q no gráfico ao lado, fazendo Q aproximar-se de P , ao longo da curva. Note que, desse modo, " x " tende a " a ".

Além disso, se a inclinação da reta secante m_{PQ} tender a um número " m " podemos definir a reta tangente à curva no ponto P como a reta que passa por P e tem inclinação m , tal que :

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{Desde que esse limite exista})$$

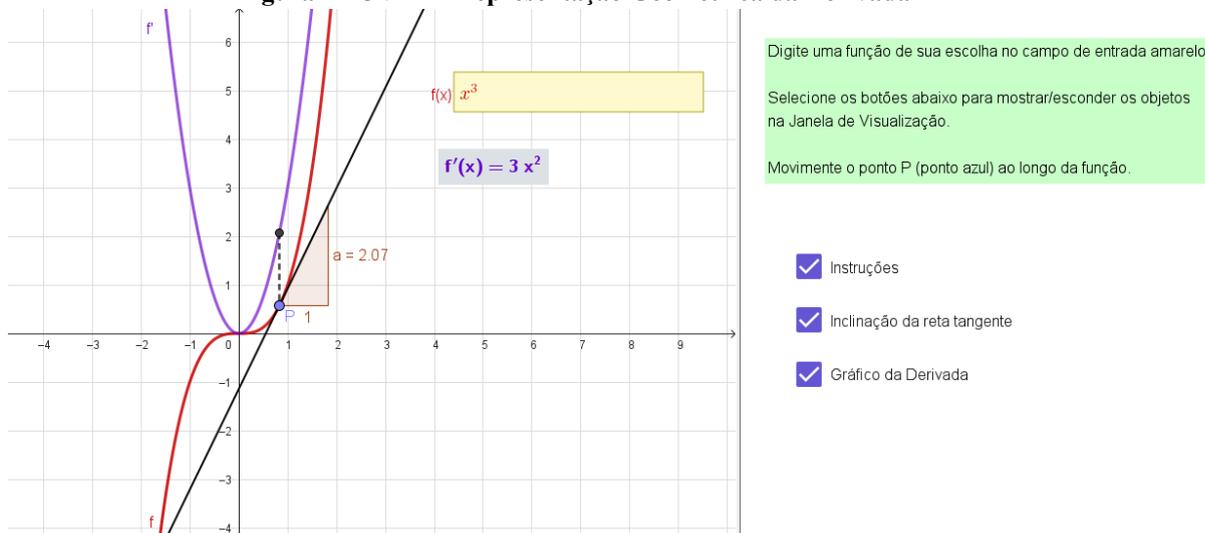


Fonte: Elaborado pelos autores (2025)

Além disso, o botão “Mostrar/esconder inclinação da reta secante PQ ” permite exibir a inclinação da reta, de maneira que é possível conferir o resultado já encontrado no cálculo realizado. As caixas de texto são dinâmicas, portanto, ao mover o ponto Q no gráfico os valores numéricos são alterados automaticamente. Logo, ao interagir com o OVA 1, espera-se que o estudante consiga compreender que a ideia de encontrar a reta tangente a uma curva leva a um limite. “Esse tipo especial de limite é chamado *derivada* e [...] pode ser interpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia” (Stewart, 2011, p. 130).

Com o intuito de representar geometricamente a derivada de uma função foi elaborado o OVA 2, mostrado na Figura 2. Novamente, o OVA é dividido em duas janelas, entretanto, neste caso, a parte gráfica possui mais destaque. Inicialmente, é exibido na primeira janela (à esquerda) apenas o gráfico de $f(x)$ e um campo de entrada onde o estudante pode alterar a função para uma outra de sua escolha. À direita, foram adicionados três botões para mostrar ou esconder objetos na construção. O botão “Instruções” exibe uma caixa de texto explicativa com dicas e descrições de como interagir com o OVA. Selecionando outro botão, há a opção de mostrar a inclinação da reta tangente no gráfico. Ademais, o último botão permite exibir o gráfico da derivada da função (escolhida a partir do campo de entrada), além de evidenciar também a sua lei de formação. É possível movimentar o ponto P ao longo da curva que representa o gráfico da função f a fim de visualizar qual é a relação da inclinação da reta tangente à curva e a derivada da função.

Figura 2 - OVA 2 - Representação Geométrica da Derivada



Fonte: Elaborado pelos autores (2025)

Os OVA foram desenvolvidos com a finalidade de auxiliar no ensino e na aprendizagem de CDI, a partir da visualização e interação com o objeto do conhecimento. É importante destacar que os OVA servem como suporte na construção do conhecimento, entretanto, não apresentam uma demonstração matemática formal, o que mantém a importância de se realizar uma sistematização do conteúdo após a manipulação desses recursos tecnológicos.

4. Considerações finais

Neste trabalho, apresentaram-se dois OVA para o estudo de CDI, em especial, abordando o conceito de derivada, mediante um exercício de IP. Neste estudo, foram identificados elementos que sugerem que as TD, em particular, os OVA constituem-se como alternativas viáveis para serem usadas em sala de aula, trazendo não somente a dinamicidade do conteúdo como também auxiliando para a melhor compreensão dos conceitos matemáticos (Lima e Rocha, 2022). A construção dos OVA e a exploração dos conceitos matemáticos por meio do GeoGebra se mostraram valiosos para a aprendizagem das bolsistas envolvidas no projeto e, acredita-se, para auxiliar nas aulas de CDI na universidade.

Para tornar os materiais construídos acessíveis, os OVA estão sendo construídos e compilados em um livro no *site* do GeoGebra juntamente com a apresentação de definições, axiomas, teoremas e proposição de exercícios, pensando sempre em instigar a investigação matemática dos estudantes ao utilizarem desse material. Os OVA disponibilizarão de ferramentas do *software* para realizar a manipulação dos objetos e visualização de resultados numéricos quando conveniente. A utilização das TD auxilia para que a construção do conhecimento matemático se torne dinâmico, trabalhando as justificativas, análises e validações necessários (Trevisan e Mendes, 2018).

É esperado que o livro seja utilizado pelos docentes de CDI na Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), além de estar disponível para os demais interessados no acervo on-line do GeoGebra.

5. Referências

ARAÚJO, C. W. de. **Derivadas e suas aplicações na educação básica derivadas e suas aplicações**. 2021. 27f. Monografia (Trabalho de conclusão de curso) – Faculdade de Licenciatura em Matemática, UFAL, Maceió (AL), 2021. Disponível em: <https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/>. Acesso em 02 ago. 2025.

BRASIL. **Parecer CNE/CES nº 1.302/2001**. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Superior. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2001. Disponível em: <https://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/>. Acesso em 04 ago. 2025.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis**, Bauru, v.22, n.1, p. 35-48, 2001. Disponível em: <https://secure.unisagrado.edu.br/>. Acesso em: 04 ago. 2025.

GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra?** 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT>. Acesso em: 03 ago. 2025.

LIMA, M. G.; ROCHA, A. A. S. da. As Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 8, n. 5, p. 729–739, 2022. DOI: 10.51891/rease.v8i5.5513. Disponível em: <https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/5513>. Acesso em: 02 ago. 2025.

PERFETTO, F. V.; ALBUQUERQUE, A. C. de. O tratamento dos objetos virtuais de aprendizagem como recursos informacionais na criação, uso e recuperação da informação. **Brazilian Journal of Information Science: research trends**, Marília, SP, v. 12, n. 3, p. 41 – 48, 2018. DOI: 10.36311/1981-1640.2018.v12n3.05.p41. Disponível em: <https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/bjis/article/view/8168>. Acesso em: 7 ago. 2025.

ROSA, C. M.; ALVARENGA, K. B.; SANTOS F. F. T. dos. Desempenho acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: Um Estudo de Caso. **International Journal of Higher Education**, Campinas, SP, v. 5, p. 1 – 16, 2018. DOI: 10.1590/2175-623677732. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br>. Acesso em: 08 ago. 2025.

SKOVSMOSE, O. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D'AMBROSIO, B. S. LOPES, C. E. (Org.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas: Mercado das Letras, 2015, p. 63-90.

STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Vol. 1.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 11, n.1, p.

209–227, 2018. UTFPR, Ponta Grossa (PR) DOI: 0.3895/rbect.v11n1.5702. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/5702>. Acesso em: 02 ago. 2025.