

## POSSIBILIDADES DO USO DE OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Emelly Marchiori<sup>1</sup>

Vitor José Petry<sup>2</sup>

Rosane Rossato Binotto<sup>3</sup>

### Resumo

Com o avanço das tecnologias digitais (TD), cresce também a necessidade de reflexão sobre as metodologias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, buscando inserir os recursos tecnológicos nas práticas pedagógicas. Para este trabalho, desenvolveu-se objetos virtuais de aprendizagem (OVA), utilizando o software GeoGebra, para o estudo de equações e inequações trigonométricas, a fim de contribuir com a produção de materiais digitais para o ensino destes conceitos. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa propositiva, fundamentada em um exercício de imaginação pedagógica na perspectiva de Skovsmose, considerando as percepções dos autores da pesquisa. Neste exercício, busca-se analisar possibilidades e potencialidades da interação com os materiais elaborados, de modo a observar os conceitos que podem ser discutidos em relação ao conteúdo abordado.

**Palavras-chave:** Objetos virtuais de aprendizagem. GeoGebra. Equações e inequações trigonométricas. Cosseno de um ângulo. Imaginação Pedagógica.

### 1. Introdução

O crescente desenvolvimento e a evolução das tecnologias têm influenciado e alavancado a busca e o seu uso como metodologias de ensino, visando a aprendizagem em diversas áreas do conhecimento. Segundo Bacich (2018, p.137), “as tecnologias digitais modificam o ambiente no qual elas estão inseridas, transformando e criando novas relações entre os envolvidos no processo de aprendizagem: professor, estudantes e conteúdos”. É nesse contexto que o uso de recursos computacionais tem se mostrado promissor, quando se trata de ensinar matemática de uma maneira ativa e dinâmica, facilitando a compreensão de conceitos mais complexos por meio da visualização e interação com o objeto do conhecimento.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê nas competências e habilidades do Ensino Médio a recomendação de se utilizar ferramentas tecnológicas, como softwares ou aplicativos, de álgebra e de geometria dinâmica, para o auxílio na aprendizagem. A importância do uso de softwares para visualizações dinâmicas é abordada, dentre outros momentos, na quinta competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias:

---

<sup>1</sup> Universidade Federal da Fronteira Sul, Graduanda em Matemática-Licenciatura. *Campus* Chapecó. Email: emellymarchiori05@gmail.com

<sup>2</sup> Universidade Federal da Fronteira Sul, Doutor em Matemática Aplicada. *Campus* Chapecó. Email: vitor.petry@uffs.edu.br

<sup>3</sup> Universidade Federal da Fronteira Sul, Doutora em Matemática. *Campus* Chapecó. Email: rosane.binotto@uffs.edu.br

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p. 532).

Assim, considerando a importância do uso das tecnologias digitais (TD) na Educação, propõem-se objetos virtuais de aprendizagem (OVA) que se constituem como “[...] um recurso digital reutilizável que auxilie na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, estimule o desenvolvimento de capacidades pessoais, como, por exemplo, imaginação e criatividade” (Spinelli, nd, p.7). Dessa forma, os OVA contribuem nos processos de ensino e aprendizagem, além de motivar os estudantes na busca pelo conhecimento. Logo, propor a utilização de OVA nas aulas é, de acordo com Pinheiro (2023, p.10), “[...] uma forma de envolver o estudante, possibilitando seu aprendizado e contribuindo para seu desenvolvimento, despertando nele habilidades importantes para a vida, como raciocínio lógico, autonomia para resolver problemas, proatividade e protagonismo”. Para Kay e Knaack (2007), OVA são todas as ferramentas interativas, baseadas na web, que apoiam o aprendizado de conceitos específicos, incrementando, ampliando ou orientando o processo cognitivo dos aprendizes.

Dessa maneira, tendo em vista as possíveis contribuições das TD na Educação Matemática, o presente trabalho tem o objetivo de apresentar e analisar alguns OVA, desenvolvidos no software GeoGebra, para o estudo de equações e inequações trigonométricas. Constituiu-se como problema de investigação identificar possibilidades e potencialidades de interação com o material produzido, por meio de um exercício de imaginação pedagógica na perspectiva de Skovsmose (2015). Conforme esse autor, “tal imaginação pode sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis” (Skovsmose, 2015, p.76).

Com o intuito de pensar nos prováveis cenários que podem ocorrer na manipulação dos objetos desenvolvidos e indicar suas contribuições para o ensino da Matemática, utiliza-se a concepção de imaginação pedagógica, pois essa possui a finalidade de “desenvolver uma compreensão mais profunda da situação imaginada” (Skovsmose, 2015, p. 79). Além disso, de acordo com Lima (2021, p. 124), “a partir de uma situação imaginada, pode-se analisar as possibilidades de levá-la à situação corrente”, levando a reflexões na tentativa de responder a algumas questões, como “o que, de fato, pode ser feito? O que pode ser organizado? Que ferramentas existem à disposição? Há algum entrave que impossibilita a implementação de algo?”

## 2. Metodologia

A presente pesquisa caracteriza-se como qualitativa, pois pretende-se “[...] atingir aspectos do humano sem passar pelos crivos da mensuração, sem partir de métodos previamente definidos e, portanto, sem ficar preso a quantificadores e aos cálculos decorrentes” (Bicudo, 2019, p.113). Trata-se também de um estudo propositivo, que, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 69), o pesquisador “não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica”.

Foram elaborados 15 OVA para o estudo de equações e inequações trigonométricas, que foram construídos no GeoGebra, e que serão disponibilizados no GeoGebra *online*. Para a análise, fez-se um recorte do *corpus* da pesquisa, conforme sugerido por Moraes e Galiazzi (2020), delimitando-o para quatro OVA relacionados às equações e inequações envolvendo o cosseno de um ângulo. Observa-se que, como a pesquisa está em andamento, os resultados apontados são parciais, visto que outros OVA serão desenvolvidos e que se pretende aplicar esses objetos em situações reais de ensino.

Ademais, os objetos elaborados foram inspirados em materiais do autor Jorge Cássio Costa Nóbrega. Em especial, baseou-se em seu livro<sup>4</sup> “Aprendendo Trigonometria com a Plataforma GeoGebra”, publicado no GeoGebra *online*.

Na próxima seção são apresentados os OVA selecionados na delimitação do *corpus* da pesquisa, acompanhados do estudo de possibilidades e potencialidades de interação com esses materiais, realizado por meio do exercício de imaginação pedagógica na perspectiva de Skovsmose (2015).

### 3. Resultados

Considerando a importância do uso de softwares matemáticos dentro e fora da sala de aula, destaca-se o GeoGebra, aplicativo computacional de geometria dinâmica que pode ser utilizado em diferentes níveis de ensino. Combinando elementos de geometria e álgebra, o GeoGebra permite a construção e manipulação de objetos matemáticos, o que possibilita e motiva o estudante a participar do processo de resolução de problemas e da construção do seu próprio conhecimento.

Assim, nesta seção, apresentam-se alguns dos OVA elaborados no GeoGebra e disponibilizados no GeoGebra *online*, acompanhados do exercício de imaginação pedagógica. A primeira atividade tem como finalidade a compreensão da resolução de equações trigonométricas envolvendo cosseno de um ângulo, na forma  $\cos(x) = a$ , em que  $a$  é um número real no intervalo  $[-1, 1]$ .

Essa atividade é composta por três OVA distintos. Nos OVA 1 e OVA 2, é abordada a resolução de uma equação em que o valor do número  $a$  é fixado em  $a = \frac{1}{2}$  e  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , respectivamente. Os objetos foram construídos em duas janelas, onde a primeira que pode ser visualizada está ilustrada na Figura 1. Nesta primeira janela estão disponíveis perguntas e textos explicativos que visam orientar o estudante durante a interação com os OVA, de forma a chamar atenção para os elementos a serem observados na construção apresentada na segunda, mostrada na Figura 2. Para a exploração dinâmica destes objetos de aprendizagem é utilizado o comando do GeoGebra “caixa para exibir/esconder objetos”, que permite selecionar as opções que mostram dicas e respostas. Estes interligam os elementos apresentados nas duas janelas, permitindo a visualização da resolução passo-a-passo, seja na forma algébrica, como também na circunferência trigonométrica.

---

<sup>4</sup> Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/M3vta5Uv>

Figura 1 – Visualização da Janela 1 do OVA 2

Como resolver a equação  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ?

Observe a circunferência trigonométrica ao lado com raio unitário ( $r = 1$ ).

Quando a medida algébrica do segmento  $\overline{OS}$  é igual a  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  qual o valor do ângulo  $\alpha$ ?

Dica

Sabemos que  $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (em radianos,  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ).

Além disso, A e A' são simétricos em relação ao eixo dos senos (eixo y).

Dessa forma, ASO e A'TO são triângulos retângulos congruentes.

Assim, podemos comparar os ângulos.

Mostrar/Esconder ângulos

Mostrar/Esconder resposta

Portanto,  $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ . Em radianos,  $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$  rad.

Mas será que existe apenas um valor para o ângulo cujo cosseno é  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  ?

Mostrar/Esconder dica

Existe um ponto A'' que é simétrico ao ponto A em relação ao eixo dos cossenos (eixo x), e é simétrico ao ponto A' em relação à origem (ponto O). Dessa forma, o ângulo  $\beta$  também possui cosseno igual a  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Solução

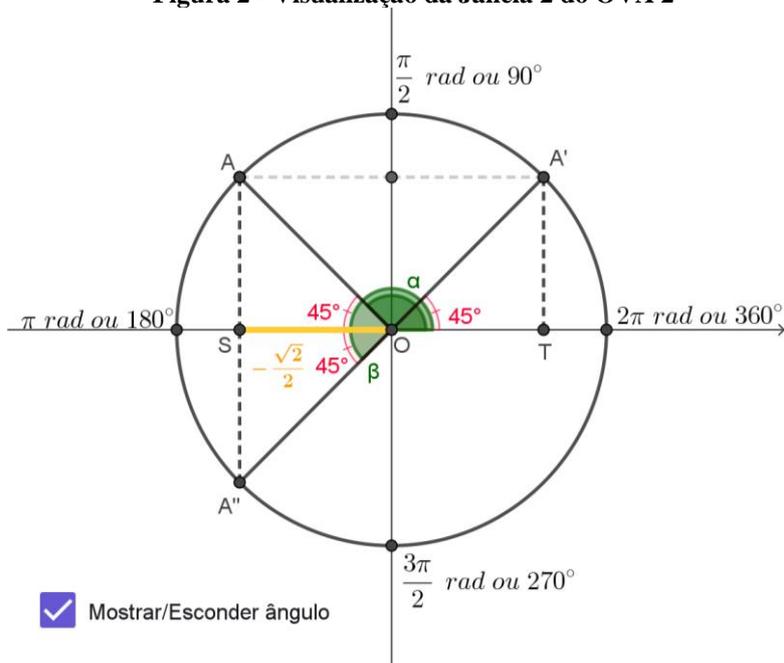
Então, para encontrar o valor do ângulo  $\beta$ , basta calcular  $(180^\circ + 45^\circ)$ , ou seja,  $\beta = 225^\circ$ .

Assim, a solução da equação no intervalo de  $[0, 360)$  é  $x = \alpha = 135^\circ$  ou  $x = \beta = 225^\circ$ .

Em radianos,  $\beta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$  rad. Solução no intervalo  $[0, 2\pi)$  é  $x = \alpha = \frac{3\pi}{4}$  rad ou  $x = \beta = \frac{5\pi}{4}$  rad.

Fonte: Os autores (2024)

Figura 2 - Visualização da Janela 2 do OVA 2

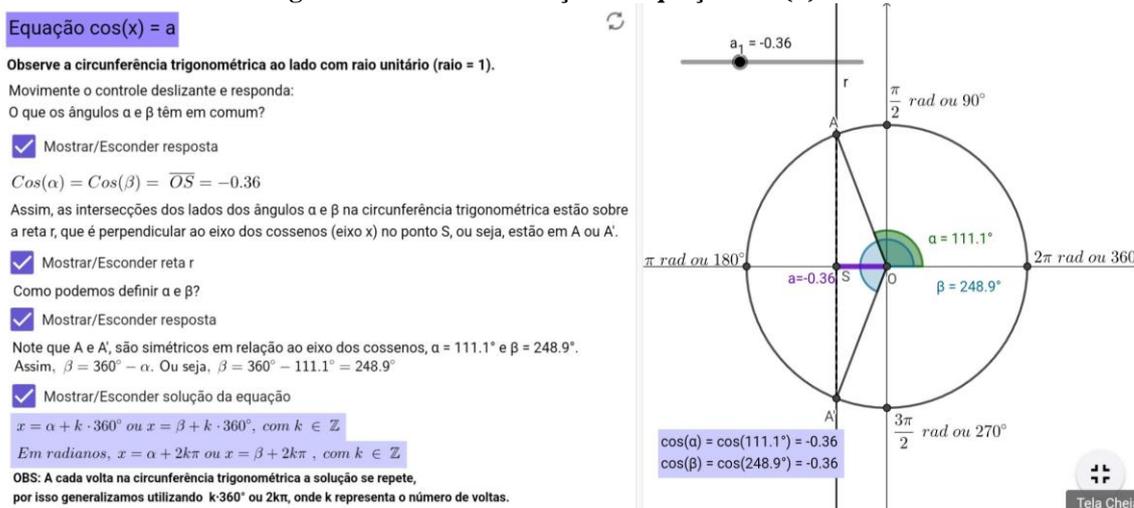


Fonte: Fonte: Os autores (2024)

O OVA 3, mostrado na Figura 3, foi desenvolvido para generalizar a resolução das equações do tipo  $\cos(x) = a$ . Esse objeto apresenta um controle deslizante para alterar o número  $a$ , com variação de -1 até 1. Dessa forma, é possível visualizar quais são os ângulos que satisfazem a equação para o número  $a$  “escolhido” ao movimentar o controle deslizante. Novamente, na primeira janela são apresentadas questões para que os estudantes percebam a relação entre os dois ângulos, a fim de obter uma generalização da solução e facilitar a resolução de equações trigonométricas envolvendo cosseno.

É importante destacar que nos objetos, OVA 1 e OVA 2, as soluções das equações são apenas para a primeira volta da circunferência trigonométrica. A partir do OVA 3 a solução é generalizada para qualquer número de voltas da circunferência trigonométrica em qualquer sentido. A partir da visualização e interação com os OVA apresentados, espera-se que os estudantes consigam resolver equações trigonométricas dessa categoria, além de desenvolver habilidades para generalizar as soluções e possuir um conhecimento mais amplo da circunferência trigonométrica. Como os OVA apresentam a resolução de equações, nas unidades de medidas grau e radianos, almeja-se que os estudantes compreendam a relação entre essas unidades e possam representar a solução da maneira mais adequada em cada situação.

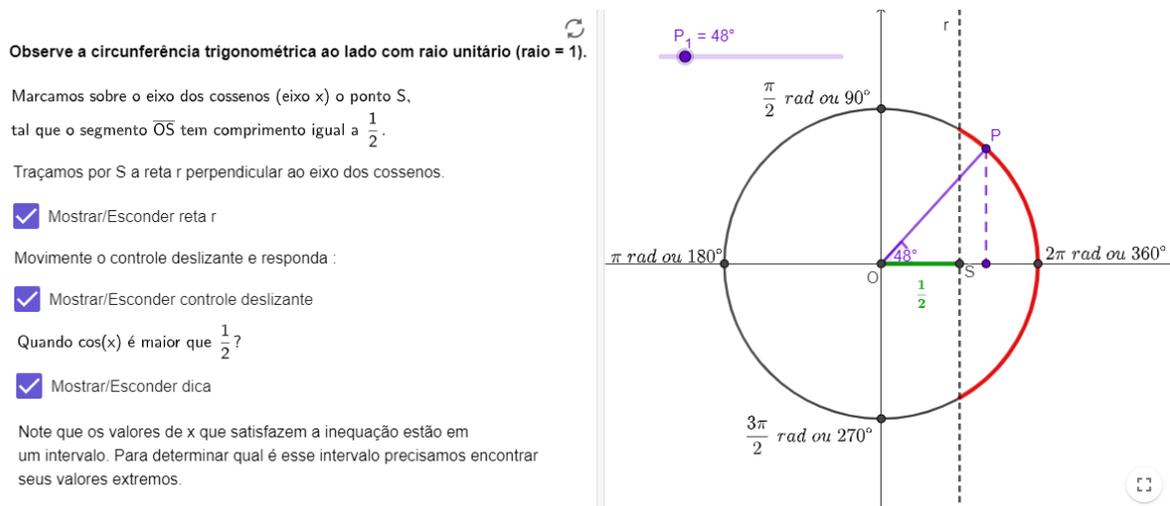
Figura 3 - OVA 3: Resolução da equação  $\cos(x) = a$



Para resolver inequações trigonométricas da forma  $\cos(x) < m$  ou  $\cos(x) > m$ , foram desenvolvidos três OVA, sendo dois com casos particulares e um terceiro com a generalização para distintos valores de  $m$ , escolhidos a partir do controle deslizante. Novamente a divisão do OVA em duas janelas permite que o estudante seja conduzido, a partir de textos explicativos e questionamentos presentes na primeira janela, a observar os principais elementos da construção na segunda janela, onde a região (o arco correspondente à solução) é representada, conforme pode ser observado na Figura 4, que mostra o OVA 4, em que é abordada a inequação  $\cos(x) > \frac{1}{2}$ .

Ao desenvolver a análise das possibilidades, sugere-se que a interação dos estudantes com os OVA possa contribuir para a aprendizagem de conceitos matemáticos envolvidos na resolução de equações e inequações trigonométricas. Acredita-se que o fato de estarem acompanhados de um exercício de imaginação pedagógica, que aponta algumas possibilidades e potencialidades de exploração e manipulação do material desenvolvido, favoreça sua utilização, corroborando com Skovsmose (2015) ao sugerir que esse exercício permite transformar a imaginação em alternativas mais acessíveis, estabelecendo possibilidades ou formas de abordagem dos conteúdos a serem trabalhados com os estudantes. Neste aspecto, a possibilidade de visualizar a representação geométrica, juntamente com a resolução algébrica tende a facilitar a compreensão dos estudantes. O uso de cores para chamar a atenção de elementos a serem observados também pode contribuir nessa compreensão.

**Figura 4 – OVA 4 para a resolução da inequação trigonométrica  $\cos(x) > \frac{1}{2}$**



Fonte: Os autores (2024)

A proposição dos OVA, acompanhados de sugestões e possibilidades de seu uso, visa contribuir com a prática docente de professores de Matemática, disponibilizando material de apoio para suas aulas. De acordo com Binotto, Petry e Gaio (2022), “OVA são importantes elementos auxiliares no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, principalmente por permitirem visualizações geométricas (e algébricas) dos objetos estudados, de forma rápida e dinâmica, permitindo comparar diferentes perspectivas destes”.

#### 4. Considerações finais

Neste trabalho apresentou-se alguns OVA construídos no software GeoGebra para o estudo de equações e inequações trigonométricas, seguidos de um exercício de imaginação pedagógica na perspectiva de Skovsmose (2015) com as percepções dos autores da pesquisa. Realizou-se a descrição de alguns dos OVA desenvolvidos e foram analisadas as possibilidades de interação com o material produzido. Como o presente trabalho é um recorte de uma pesquisa em andamento, é fundamental ressaltar que os resultados são parciais. Pretende-se organizar

esses OVA em atividades no GeoGebra *online*, as quais farão parte de um livro na mesma plataforma, a fim de disponibilizar o material para uso em aulas de matemática, além de complementar os conteúdos de trigonometria já publicados no GeoGebra *online*.

Portanto, mediante à reflexão acerca das viabilidades do uso de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de matemática, pode-se considerar que OVA são recursos importantes a serem usados na construção do conhecimento, pois permitem a visualização e manipulação do conteúdo estudado, motivando os estudantes e auxiliando na promoção de uma aprendizagem mais dinâmica.

## 5. Referências

- BACICH, Lilian. **Formação continuada de professores para o uso de metodologias ativas**. In: BACICH, Lilian; MORAN, José (Org.). Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. 1 ed. Porto Alegre: Penso, 2018, p. 129-152.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica**. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Org.). Pesquisa qualitativa em educação matemática. São Paulo: Autêntica, 2019, p. 107-119.
- BINOTTO, Rosane Rossato; PETRY, Vitor José; GAIO, Sandy Maria. Estudo de Possibilidades do Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem no Ensino de Cônicas por meio de um Exercício de Imaginação Pedagógica. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 9, n. 2, p. 108–129, 2022. <https://doi.org/10.23925/2358-4122.2022v9i257628>
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/UNDIME, 2018.
- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012.
- KAY, Robin. H.; KNAACK, Liesel. Evaluating the learning in learning objects. **Open Learning: The Journal of Open and Distance Education**, v. 22, n.1, p. 5-28, 2007.
- LIMA, Priscila Coelho. Imaginação pedagógica, educação matemática e inclusão: em busca de possibilidades para as aulas de Matemática. **Intermaths**, v. 2, n. 1, p. 121-137, 2021.
- MORAES, Roque. & GALIAZZI, Maria do Carmo. Análise Textual Discursiva. Unijuí, 2020.
- PINHEIRO, Janaína Estela. **Ensino de trigonometria a partir de objetos virtuais de aprendizagem: um estudo de possibilidades**. 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática) – PROFMAT, UFFS, Chapecó (SC), 2023. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/7282>. Acesso em: 04 ago.2024.
- SKOVSMOSE, Ole. **Pesquisando o que não é, mas poderia ser**. In: D'AMBROSIO, Beatriz Silva, Lopes, Celi Espasandin. (Org.). Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática. Campinas: Mercado das Letras, 2015, p. 63-90.
- SPINELLI, Walter. **Os objetos virtuais de aprendizagem: ação, criação e conhecimento**. Aprendizagem Matemática em Contextos Significativos: Objetos Virtuais de aprendizagem e Percursos Temáticos. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, n.d. Disponível em: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6749/mod\\_resource/content/2/Objetos\\_de\\_aprendizagem.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6749/mod_resource/content/2/Objetos_de_aprendizagem.pdf). Acesso em: 04 ago.2024.