UMA INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS DE BANACH

Dalía Carvalho de Souza[1]
Valdênis Martins da Silva Júnior[2]
Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza[3]

Palavras-chave: Topologia. Espaços de Banach. Espaços Métricos.

1. Introdução

Na Matemática, um Espaço de Banach é um Espaço Vetorial Normado completo. Seu nome é em homenagem ao matemático Stefan Banach (1892 - 1945) que contribuiu com vários trabalhos, inclusive na área de análise funcional. Em 1932, Banach lançou o "*Théorie des opérations linéaires"* (em português: "Teoria das operações lineares"), sendo este o seu trabalho considerado o mais relevante. Aqui queremos abordar os conceitos de topologia em Espaços Métricos, logo em seguida a noção de Espaços de Banach.

Realçamos que a metodologia usada se baseia na abordagem qualitativa, na qual iremos destacar a pesquisa bibliográfica. Por fim, apresentamos as definições finais sobre Espaços Métricos, Sequência de Cauchy, Espaços Métricos Completos e Espaços de Banach.

2. Metodologia

A pesquisa fundamenta-se na abordagem qualitativa, enfatizando a pesquisa bibliográfica. Dividimos o estudo em dois tópicos sendo esses precisamente o estudo de conceitos topológicos em Espaços Métricos, em que vimos as definições e os conceitos de métrica, espaço vetorial normado, bolas abertas e fechadas e com alguns desses conteúdos topológicos avançamos para a definição de Espaços de Banach.

3. Resultados e discussão da pesquisa ou da experiência

Inicialmente apresentaremos a definição de Espaços Métricos e em seguida exibiremos algumas definições para poder compreender sobre o Espaço de Banach.

Definição 1. Definimos Espaços Métricos como: uma métrica num conjunto M é uma função $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x,\ y,\ z\ \in M$:

d1) $d(x,\ x) = 0$; **d2)** Se $x \neq\ y$,então $d(x,\ y) > 0$; **d3)** $d(x,\ y)\ =\ d(y,\ x)$; **d4)** $d(x,\ z) \leq d(x,\ y)\ +\ d(y,\ z)$.

---

[1] Discente do curso de Licenciatura em Matemática.UFRPE-SEDE. dalia_carvalho@hotmail.com

[2] Discente do curso de Licenciatura em Matemática.UFRPE-SEDE. valdenis.martins@hotmail.com

[3] Professor do Departamento de Matemática. UFRPE-SEDE. eudesmendesbarboza@gmail.com

Definição 2. Espaço vetorial normado é um par $(E;\ ||\ ||)$, onde E é um espaço vetorial real e || || é uma norma em E. Todo espaço vetorial normado torna-se um espaço, e espaço métrico pela definição $d(x,\ y)\ =\ ||x\ -\ y||$. Diz-se que a métrica é proveniente da norma.

Um exemplo de espaço vetorial normado é $\mathbb{R}^n$, onde para $(x_1,\ x_2, . . . ,\ x_n)\ \in \mathbb{R}^n$ tem-se $||\ x\ ||\ \ = \sum |\ x_i|$.

Para que possamos definir o Espaço de Banach, precisaremos definir antes Sequências de Cauchy e Espaços Métricos Completos e assim podemos apresentar o Espaço de Banach.

Definição 3. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M é chamada sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,\ n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Nos mostra os termos de uma sequência de Cauchy.

Agora iremos definir o Espaço Métrico Completo.

Definição 4. Um espaço métrico M é dito completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente. Um exemplo simples e de fácil compreensão é a reta que é um espaço métrico completo, com a métrica proveniente do módulo.

Dadas as definições anteriores, finalmente poderemos definir o Espaço de Banach.

Definição 5. Um espaço vetorial normado completo chama-se um Espaço de Banach.

Podemos trazer como exemplo o $\mathbb{R}^n$ sendo um espaço de Banach. Porém, o conjunto dos números racionais não é um espaço de Banach, pois não é completo.

4. Considerações finais

O $\mathbb{R}^n$ é sempre um Espaço de Banach, porém nem todo espaço é de Banach. Como exemplo temos o conjunto $\mathcal{P}[0, 1]$ das funções polinomiais $p\colon [0, 1]\ \rightarrow \mathbb{R}$ é um espaço vetorial. Podemos considerar em $\mathcal{P}[0, 1]$a norma $||p||\ \ = sup_{t\, \in\, [0,1]}\, |p(t)|$. Em relação a esta norma, o espaço $\mathcal{P}[0, 1]$ não é completo. Pois sabendo que a sequência de polinômios $p_n(x)\ \ = 1\ +\ x\ +\frac{x^2}{2!} +. . .\ \ +\frac{x^n}{n!}$ é de Cauchy e converge uniformemente em $[0, 1]$ para a função contínua $f(x)\ = e^x$, que não é um polinômio.

Referências

LIMA, Elon Lages. Análise Real Volume 1. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1989.

LIMA, Elon Lages. Análise Real Volume 2. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

LIMA, Elon Lages. Espaços Métricos. Rio de Janeiro. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.