DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS DO MODELO COMPLETO DE STREETER PHELPS

FERNANDO AUGUSTO BRANCHER [1,2]*, VITOR JOSÉ PETRY[2,3], JANICE TERESINHA REICHERT[2,4]

1 Introdução/Justificativa

Os problemas ambientais vêm se tornando cada vez mais críticos em nossa sociedade, situações como poluição da água, do solo e do ar são cada vez mais evidentes e com isso também é a importância de seus estudos e pesquisas, tendo em vista a extensão do impacto que tais situações podem causar tanto para o meio ambiente com a população em geral. A água é um dos recursos mais essenciais para o desenvolvimento de vida na Terra, porém, os altos índices de poluição do meio aquático e terrestre colocam em risco a saúde e sobrevivência de diversas espécies. Quando ocorre um foco de poluição em um rio, este tem uma capacidade individual de se recuperar ao longo de sua extensão, essa capacidade varia de acordo com as características do rio. A monitoração destas contaminações pode ser feitas através de amostras de água e análises de parâmetros físico-químicos e biológicos em laboratório, que geram um custo e demandam de tempo para a realização das análises. As simulações matemáticas buscam evitar tais custos e tempo ao buscar prever a concentração dos poluentes baseando-se nas características e parâmetros do rio.

2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é determinar os coeficientes do modelo de Streeter Phelps apresentado nas equações (1) e (2) a partir de dados experimentais obtidos na literatura.

3 Material e Métodos/Metodologia

O modelo matemático de Streeter Phelps foi desenvolvido em 1925 por pesquisadores estadunidenses com o objetivo de determinar o tempo e/ou a distância que um determinado rio

---

[1] Graduado em Licenciatura em Matemática, Universidade Federal da Fronteira Sul, *campus Chapecó,* **Bolsista** contato: fernando.brancher@hotmail.com
[2] Grupo de Pesquisa: Matemática Aplicada e Computacional – GPMAC
[3] Doutor em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
[4] Doutora em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, **Orientadora.**

ISSN 2526-205x

consegue se recuperar após a entrada de um efluente poluído em um ponto conhecido deste rio. O modelo é formado por um sistema de equações diferenciais parciais acopladas (BENNETT e RATHBUN, 1942), mostradas nas equações (1) e (2) abaixo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_2\,(C_s - C) - K_1 L - D_B \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + U\frac{\partial L}{\partial x} = D_x\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - (K_1 + K_3)\,L + L_R \qquad (2)$$

com $x \in [0, X]$ e $t \in [0, T]$ e condições de contorno $C(0,T) = \Phi_1(t)$, $C(X,t) = \psi_1(t)$, $L(0,t) = \Phi_2(t)$, $L(X,t) = \psi_2(t)$. Onde C é a concentração de oxigênio dissolvido (OD) (*mg/l*), C_s é a saturação da concentração de OD (*mg/l*), é a distância ao longo do rio (km), t é o tempo (dias), U é a velocidade média do fluxo (km/dias), D_x é o coeficiente de dispersão (km²/dias), D_B é um parâmetro que inclui o efeito da fotossíntese, respiração de plantas e remoção de OD ao longo do rio (*mg/l.dia*), K_1 é o coeficiente de desoxigenação (dia^{-1}), K_2 é o coeficiente de reaeração (dia^{-1}), K_3 é o coeficiente de taxa de remoção da demanda bioquímica de oxigênio (DBO) por sedimentação e adsorção (dia^{-1}), L é a DBO (*mg/L*) e L_R é a taxa de adição de DBO ao longo do leito do rio, isso inclui a adição de DBO com escoamento, a difusão de resíduos parcialmente degradados do leito e a ressecção e ressuspensão dos depósitos do fundo (*mg/l.dia*).

Neste trabalho é apresentada uma solução numérica do modelo definido pelas equações (1) e (2), também conhecido como modelo completo. Alguns autores apresentam simplificações e adaptações do modelo na tentativa de trabalhar com soluções analíticas e facilitar a resolução através de métodos numéricos.

Ao trabalhar com o modelo completo e buscar determinar os parâmetros das equações do modelo, trabalhamos com um problema inverso, no qual foi utilizado o método de procura em rede para solucioná-lo. O problema direto foi resolvido utilizando discretizações com diferenças finitas nas equações (1) e (2) do modelo, sendo diferenças finitas progressivas de 1ª ordem na variável temporal (*t*) e centradas de 2ª ordem na variável espacial (*x*). Para o ajuste dos coeficientes foram usados dados experimentais da literatura de Formentini (2010). Formentini realizou a coleta de dados da concentração de OD e de DBO em três pontos distintos do Rio Vacacaí Mirim, em Santa Maria, RS, em um período de vinte dias. A distância do ponto D_1 (coordenadas geográficas: 29° 40' 54,54" S e 53° 46' 53,51" O) ao ponto D_2 (29° 41' 51,23" S e 53° 42' 31,91" O), considerando a trajetória da água ao longo do rio é de aproximadamente 10,88 km e entre os pontos D_2 e D_3 (29º 41' 51,23" S e 53º 42' 31,91" O) de aproximadamente 6,58 km.

Para a solução do problema foram considerados os valores de OD e DBO nos pontos D_1 e D_3 como condições de contorno de entrada e saída respectivamente, enquanto os valores de OD e DBO do ponto D_2 foram utilizados para ajustar os parâmetros.

Ao resolver o problema inverso, foi utilizado no software MATLAB o método de procura em rede que consiste em definir um intervalo que contenha um valor ótimo para cada um dos parâmetros ajustados, construindo uma rede de intervalos particionados. Com a rede de intervalos definida, é resolvido o problema direto com todas as combinações possíveis dos valores que a compõem, buscando o menor erro de acordo com o critério estabelecido.

4 Resultados e Discussão

Após a implementação numérica foram realizadas simulações para encontrar os coeficientes das equações do modelo, visando a otimização do mesmo. O problema foi resolvido utilizando $X = 17,46\ km$, $T = 20$ dias e $U = 5,616\ km \cdot d^{-1}$, conforme as condições dos dados experimentais utilizados. Durante as simulações identificou-se a necessidade de variar o valor do parâmetro L_R ao longo do tempo, conforme equação (3). Além disso, em testes realizados foi observado que a aproximação de L_R por uma função logarítmica se ajustou melhor aos resultados do que um valor constante, com isso o coeficiente foi aproximado pela função (3). A escolha desta função foi devido ao comportamento da curva, que apresentava menor influência de L_R no início das simulações com gradativo aumento da influência ao longo do tempo.

$$L_R = a_0 \ln ln\ (1 + a_1 t)\ + a_2 \qquad (3)$$

sendo a_0, a_1 e a_2 parâmetros a serem definidos. A inclusão destes novos parâmetros permitiu um ajuste mais refinado do modelo, com erro de aproximação significativamente menor em relação às simulações em que o coeficiente era considerado constante.

Os resultados dos parâmetros ajustados são apresentados na Tabela 1. Considerou-se o melhor ajuste aquele que apresentou o erro absoluto médio entre a solução obtida pelas simulações e pelos dados experimentais em todos os pontos de coleta. O valor desse erro médio com os parâmetros da Tabela 1 foi de $1,59 \cdot 10^{-2}$. Na figura 2 é mostrado os resultados para os valores de OD e DBO ao longo do tempo.

Tabela 1. Parâmetros ajustados na resolução do problema inverso.

Coeficiente	K_1 (d^{-1})	K_2 (d^{-1})	K_3 (d^{-1})	D_x *(km²/dias)*	D_B *(mg/l.dia)*	a_0	a_1	a_2
Valor	1,10	1,25	0,05	2,25	0,00	0,50	0,45	0,70

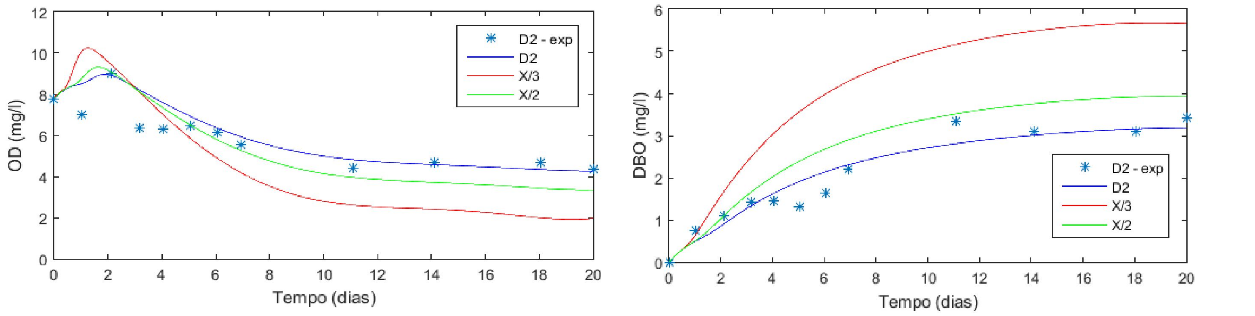

Figura 1. À esquerda: Curvas de OD em função do tempo. À direita: Curvas de DBO em função do tempo.

Observa-se na Figura 1 uma boa aproximação das curvas simuladas numericamente pelo modelo com os dados experimentais, sugerindo que o modelo descreve de forma satisfatória o fenômeno físico que retrata os dados.

5 Conclusão

Os resultados apresentados acima mostram que o modelo de Streeter Phelps se adequou bem na descrição do problema em questão, sendo um bom método para prever as concentrações de OD e DBO, que são fundamentais para determinar a qualidade da água de um rio e sua capacidade de autodepuração. Além disso, a implementação e resultados do modelo completo mostra que não há necessidade de fazer excessivas simplificações ou alterações no modelo, porém para resultados ainda melhores é conveniente coletar estes dados (OD e DBO) em mais locais do rio, a fim de apurar resultados mais precisos.

Referências

BENNETT, J.P. RATHBUN, R.E. *Reaeration in Open-Channel Flow.* U.S. Government Printing Office, Washington, 1942.

FORMENTINI, T.A. Coeficientes de desoxigenação e de reaeração superficial em trechos do rio Vacacaí Mirim, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, UFSM, 2010.

Palavras-chave: Modelo Streeter Phelps; problema inverso; determinação de parâmetros.

Financiamento

FAPESC - FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA E INOVAÇÃO DO ESTADO DE SANTA CATARINA