

SUSTENTABILIDADE E RECURSOS ENERGÉTICOS BASEADOS EM PIEZOELÉTRICOS: ESTRATÉGIAS INOVADORAS PARA PISOS INTELIGENTES

STEFFANI BRAGA DE MATTOS^{1,2}, JORGE LUIS PALACIOS FELIX^{2,3}

1 Introdução

A busca por fontes alternativas de energia tem estimulado o desenvolvimento de sistemas capazes de converter pequenas quantidades de energia mecânica disponível no ambiente em energia elétrica. Nesse contexto, a colheita de energia vibratória por meio de materiais piezoelétricos constitui uma alternativa promissora para aplicações de baixa potência, uma vez que permite converter deformações mecânicas em energia elétrica e pode ser integrada a estruturas submetidas a vibrações ambientais (BORGES, 2021).

Ribeiro et al. (2022) analisaram um oscilador magneto-piezoelétrico submetido a uma excitação não ideal, evidenciando a importância da interação entre a fonte e o sistema na caracterização da dinâmica. Em trabalhos relacionados a estruturas do tipo pórtico, a ressonância interna 2:1 também foi associada à transferência de energia vibratória entre modos e à possibilidade de aproveitamento dessa energia por meio de materiais piezoelétricos. Outros pesquisadores demonstraram que a ressonância interna 2:1, associada ao acoplamento magnético não linear, promove interação modal e pode ampliar significativamente a faixa de operação de sistemas de colheita de energia vibratória (XIONG, TANG E MACE, 2018).

Nesse contexto, o presente trabalho investiga numericamente um sistema composto por duas vigas flexíveis acopladas magneticamente, incorporando um transdutor piezoelétrico e submetido a uma fonte de excitação cuja frequência varia no tempo. A análise concentra-se na influência da ressonância interna 2:1 sobre a resposta mecânica e sobre a tensão elétrica gerada pelo piezoelétrico. Além da passagem pela região de ressonância, são empregadas Seções de Poincaré para complementar a caracterização da dinâmica do sistema.

1 Acadêmica de Engenharia Ambiental e Sanitária, instituição UFFS, *campus* Cerro Largo, contato: steffanibraga7@gmail.com

2 Grupo de Pesquisa: Recursos Energéticos e Tecnologias Limpas - RETEC

3 Doutor em Engenharia Mecânica pela UNICAMP. Professor efetivo do Curso de Engenharia Ambiental e Sanitária e do Programa de Pós-Graduação em Ambiente e Tecnologias Sustentáveis da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS) *campus* Cerro Largo, RS. E-mail: jorge.felix@uffs.edu.br.

2 Objetivos

Investigar numericamente a influência da ressonância interna 2:1 e da excitação externa não ideal sobre a dinâmica de um sistema de colheita de energia piezoelétrica, analisando a transferência de energia entre os modos vibratórios e sua influência sobre a tensão elétrica produzida pelo transdutor.

3 Metodologia

A formulação adotada baseia-se em um modelo de sistema vibratório composto por duas vigas flexíveis em balanço, posicionadas perpendicularmente entre si e acopladas por meio de ímãs permanentes localizados nas extremidades livres. Um transdutor piezoelétrico é associado à base da viga vertical, permitindo a conversão da deformação mecânica em resposta elétrica. A configuração considerada é inspirada em modelos de estruturas acopladas magneticamente e em estudos anteriores de sistemas de colheita de energia piezoelétrica. A resposta dinâmica do sistema é produzida por uma força externa não-ideal definida com frequência variável no tempo (FELIX et al., 2025; YANG e TOWFIGHIAN, 2019).

O sistema coletor de energia não-ideal é descrito por três equações diferenciais ordinárias não lineares adimensionais, associadas às duas coordenadas mecânicas e à variável elétrica do transdutor, conforme apresentado nas Equações (1)–(3):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu_1 \frac{dx}{dt} + \omega_1^2 x + \alpha_1 y^2 = g_0 \sin(\omega t + \alpha_0 \sin(b_0 \omega t)) \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu_2 \frac{dy}{dt} + \omega_2^2 y + \alpha_3 xy - \zeta V = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} + \lambda v + K \frac{dy}{dt} = 0 \quad (3)$$

4 Resultados e Discussão

Para a integração numérica, as Equações (1)–(3) foram inicialmente transformadas em um sistema equivalente de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, utilizando variáveis de estado. A solução numérica foi obtida pelo método de Runge–Kutta durante a passagem pela região de ressonância. Foram utilizados os seguintes parâmetros adimensionais: $\mu_1=0,01$, $a_1=0,4$, $\mu_2=0,01$, $a_3=0,3$, $\zeta=0,05$, $\kappa=0,5$, $\lambda=0,05$, $f_0=0,2$, $a_0=2,2$, $b_0=0,01$.

A Figura 1 apresenta a resposta dinâmica do sistema durante a passagem pela região de ressonância externa, evidenciando a ocorrência do fenômeno de ressonância interna. Fora da faixa de ressonância, isto é, para $\Omega_0 \in [1,70,1,86) \cup (2,15,2,40]$, observa-se que a viga horizontal (curva azul) apresenta oscilações de pequena amplitude, enquanto a viga vertical (curva vermelha) permanece praticamente sem oscilações. Nessas condições, a tensão elétrica gerada pelo piezoelétrico (curva preta) é praticamente nula. Na região de ressonância externa, aproximadamente entre $\Omega_0 \in [1,86,2,15]$, ocorre transferência de energia entre as vigas, promovendo aumento significativo da amplitude da viga vertical e, consequentemente, da tensão elétrica gerada pelo transdutor piezoelétrico. Simultaneamente, observa-se redução da resposta da viga horizontal, evidenciando a ocorrência da ressonância interna e a eficiência da conversão eletromecânica do sistema.

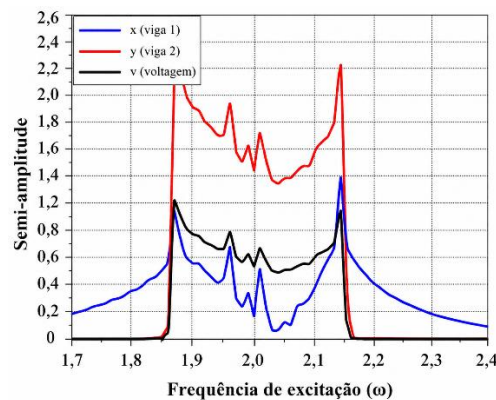


Figura 1. Curvas de passagem de ressonância

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

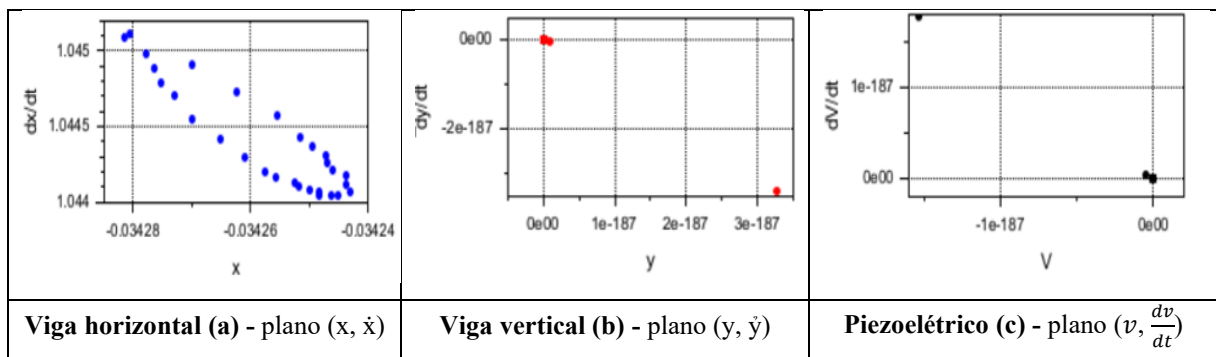


Figura 2. Resposta da viga horizontal (a), vertical (b) e piezoelétrico (c) da seção de Poincaré.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2026.

A Figura 2 apresenta as Seções de Poincaré do sistema para a frequência de excitação

$\Omega=1,8$, considerando os planos de fase da viga horizontal, da viga vertical e do piezoelétrico.

No plano da viga horizontal, Figura 2(a), observa-se uma estrutura de pontos relativamente concentrada. Essa organização indica uma resposta dinâmica mais regular para o grau de liberdade diretamente relacionado à excitação externa. Como a viga horizontal constitui o principal caminho de entrada da energia mecânica no sistema, sua resposta está fortemente condicionada pela frequência de excitação e pelo acoplamento com o segundo grau de liberdade. A resposta da viga vertical, apresentada na Figura 2(b), apresenta uma distribuição mais ampla dos pontos no plano de fase. Essa característica indica uma dinâmica mais complexa do que aquela observada na viga horizontal e está associada ao acoplamento não linear entre os dois graus de liberdade. A condição de ressonância interna 2:1 favorece a interação entre os modos e modifica a evolução da resposta da viga vertical ao longo dos ciclos da excitação.

É importante destacar que a distribuição dos pontos na Seção de Poincaré, isoladamente, não permite afirmar que o sistema apresenta comportamento caótico. Entretanto, a diferença entre as estruturas observadas nos dois planos evidencia que os graus de liberdade não apresentam respostas dinâmicas equivalentes. Para uma caracterização definitiva de regimes periódicos, quase-periódicos ou caóticos, análises complementares, como espectro de Fourier, diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov, deverão ser realizadas em trabalhos futuros.

5 Conclusão

Os resultados evidenciaram a dinâmica não linear de um sistema de colheita de energia piezoelétrica constituído por duas vigas flexíveis magneticamente acopladas e submetidas a excitação não ideal. Na região de ressonância, a amplificação da resposta da viga vertical, acompanhada pela redução da amplitude da viga horizontal, indica transferência de energia entre os modos associada à ressonância interna 2:1. Simultaneamente, observou-se aumento da tensão elétrica produzida pelo transdutor, evidenciando o acoplamento entre a dinâmica mecânica e a conversão eletromecânica.

Para $\Omega = 1,8$, as Seções de Poincaré revelaram diferentes organizações dinâmicas entre os graus de liberdade, com maior concentração de pontos na viga horizontal e distribuições mais amplas nas respostas vertical e elétrica. Esses resultados indicam o potencial da ressonância interna 2:1 para direcionar energia vibratória ao transdutor piezoelétrico, favorecendo aplicações em pisos inteligentes submetidos a excitações mecânicas.

Como continuidade, recomenda-se incorporar diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov, visando caracterizar com maior precisão os regimes dinâmicos e quantificar o desempenho energético do sistema.

Referências Bibliográficas

BORGES, G. X. G. *Estudo experimental dos efeitos não lineares na geração de energia limpa através de materiais piezoelétricos*. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2021.

RIBEIRO, M. A.; BALTHAZAR, J. M.; LENZ, W. B.; FELIX, J. L. P.; LITAK, G.; TUSSET, A. M. Fractional dynamical behavior of an elastic magneto piezo oscillator including non-ideal motor excitation. *Axioms*, v. 11, p. 667, 2022. DOI: 10.3390/axioms11120667.

YANG, W.; TOWFIGHIAN, S. A parametric resonator with low threshold excitation for vibration energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration*, v. 446, p. 129–143, 2019. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.01.038.

XIONG, L.; TANG, L.; MACE, B. R. A comprehensive study of 2:1 internal-resonance-based piezoelectric vibration energy harvesting. *Nonlinear Dynamics*, v. 91, n. 4, p. 1817–1834, 2018. DOI: 10.1007/s11071-017-3982-3.

FELIX, J. L. P.; BALTHAZAR, J. M.; TUSSET, A. M.; LIMA, J. J.; RIBEIRO, M. A.; PICIRILLO, V. Comportamento dinâmico não linear e geração de energia de um piso coletor de energia híbrido sob excitações não ideais. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 28., 2025, Curitiba. *Anais eletrônicos [...]*. Curitiba: ABCM, 2025. Artigo COB-2025-1988.

Palavras-chave: Sistema não-ideal; piezoelétrico; ressonância interna; energia renovável.

Nº de Registro no sistema Prisma: PES-2025-0326

Financiamento

