

ESTUDO DE POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA USANDO OVA¹

EMELLY MARCHIORI^{2,3}, ROSANE ROSSATO BINOTTO^{2,4}, VITOR JOSÉ
PETRY^{2,5}

1 Introdução

A inserção das tecnologias digitais (TD) na Educação mostra-se cada vez mais necessária, visto que proporciona alterações nos métodos de ensino, a fim de suprir a demanda das novas gerações. Em um mundo conectado, o uso de TD no ambiente educacional “permite a realização de várias atividades, visando ao desenvolvimento de novas habilidades de aprendizagem, atitudes e valores pessoais e sociais” (Kenski, 2003, p. 52). É possível observar as contribuições das ferramentas tecnológicas quando se trata de ensinar matemática de uma maneira mais dinâmica. Para Petry, Mohr e Moretto (2023, p. 415) “as tecnologias podem constituir um meio de facilitar a visualização e como consequência, a compreensão de conceitos e de conteúdos matemáticos”.

Considerando as contribuições das TD na Educação, destaca-se o uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVA). De acordo com Spinelli (n.d, p. 7), um OVA é “[...] um recurso digital reutilizável que auxilie na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, estimule o desenvolvimento de capacidades pessoais, como, por exemplo, imaginação e criatividade”. Além disso, o uso de OVA nas aulas proporciona uma abordagem mais participativa para os alunos, de modo a oferecer práticas adaptativas, além de tornar os conceitos matemáticos mais compreensíveis. Conforme Borges e Scheffer (2018, p. 64) é essencial que os OVA “viabilizem a construção dos conceitos em processos que combinem o acesso às informações matemáticas, a ações individuais do aluno, ao diálogo argumentativo, a representação simbólica e o aperfeiçoamento da linguagem matemática”.

Desenvolveu-se OVA no GeoGebra para o estudo de equações e inequações

¹ Título do subprojeto vinculado: Estudo de possibilidades do uso de objetos virtuais de aprendizagem por meio de exercícios de imaginação pedagógica e da aplicação de sequências didáticas focadas em metodologias ativas.

² Graduanda no Curso de Licenciatura em Matemática, UFFS, *Campus* Chapecó, contato: emellymarchiori05@gmail.com.

³ Grupo de Pesquisa em Educação Matemática – GPEMAT.

⁴ Doutora em Matemática, UFFS, *Campus* Chapecó, **Coorientadora**.

⁵ Doutor em Matemática Aplicada, UFFS, *Campus* Chapecó, **Orientador**.

trigonométricas. Buscou-se investigar possibilidades e potencialidades de interação com o material produzido, por meio de um exercício de imaginação pedagógica (IP) (Skovsmose, 2015). A IP “pode sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis” (Skovsmose, 2015, p.76). Além disso, a imaginação pedagógica tem a finalidade de “desenvolver uma compreensão mais profunda da situação imaginada” Skovsmose (2015, p.79).

2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo apresentar OVA elaborados no software GeoGebra e identificar possibilidades e potencialidades para o ensino de equações e inequações trigonométricas, a partir de um exercício de imaginação pedagógica.

3 Metodologia

Essa pesquisa tem abordagem qualitativa, pois pretende “[...] atingir aspectos do humano sem passar pelos crivos da mensuração, sem partir de métodos previamente definidos e, portanto, sem ficar preso a quantificadores e aos cálculos decorrentes” (Bicudo, 2019, p. 113). Trata-se de um estudo propositivo, pois o pesquisador “não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica” (Fiorentini e Lorenzato, 2012, p. 69). Foram desenvolvidos OVA no GeoGebra para o estudo de equações e inequações trigonométricas. Para este trabalho, fez-se um recorte do *corpus* da pesquisa, delimitando a análise para três OVA que abordam equações e inequações da tangente de um ângulo. É importante salientar que, por tratar-se de uma pesquisa em andamento, os resultados são parciais. Na seção que segue, apresenta-se a descrição dos OVA do recorte do *corpus* da pesquisa fazendo uma análise de possibilidades e potencialidades da interação com esses objetos por meio de um exercício de IP.

4 Resultados e Discussão

Apresentam-se duas atividades, sendo que a primeira conta com quatro OVA que exploram as equações trigonométricas, na forma $tg(x) = a$, em que a é um número real e $tg(x)$ é a tangente do ângulo x . O OVA 1, ilustrado na Figura 1, tem o objetivo de introduzir a resolução dessa equação com $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Esse OVA é dividido em duas janelas, onde na

primeira dispõem-se questões com a finalidade de instigar o pensamento investigativo dos estudantes. O objeto, em seu estado inicial, não contém as soluções, que podem ser acessadas ao acionar os botões de “mostrar/esconder resposta”. A segunda janela permite visualizar a circunferência trigonométrica, o que é fundamental, pois os textos explicativos da primeira janela estão relacionados com a imagem apresentada na segunda. Para encontrar os valores de x que satisfazem a equação, são utilizados conhecimentos prévios sobre ângulos notáveis, além das relações de simetria na circunferência e as reduções para o primeiro quadrante.

Figura 1 - OVA 1 – Solução da equação $tg(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Como resolver a equação $tg(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$?

Observe a circunferência trigonométrica ao lado com raio unitário ($r = 1$).
Seja t a reta tangente à circunferência no ponto S .
 Quando a medida algébrica do segmento \overline{ST} é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ qual é o valor do ângulo α ?

Mostrar/Esconder dica
 Sabemos que $tg(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Assim, podemos comparar os ângulos.

Mostrar/Esconder ângulo
 Note que $\angle A'OS$ e $\angle AOS$ são ângulos congruentes (A e A' são simétricos em relação ao eixo y).

Mostrar/Esconder AOS'
 Mostrar/Esconder resposta

Assim, $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Em radianos, $\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ rad.

Mas será que existe outro valor para o ângulo cuja tangente é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$?

Mostrar/Esconder dica
 Existe um ponto A'' que é simétrico ao ponto A' em relação ao eixo dos cossenos (eixo x), e é simétrico ao ponto A em relação à origem (ponto O).

Dessa forma, o ângulo β também possui tangente igual a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solução
 Então, para encontrar o valor do ângulo β , basta calcular $(360^\circ - 30^\circ)$, ou seja, $\beta = 330^\circ$.
 Assim, a solução da equação no intervalo de $[0, 360)$ é $x = \alpha = 150^\circ$ ou $x = \beta = 330^\circ$.
 Em radianos, $\beta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ rad. Solução no intervalo $[0, 2\pi)$ é $x = \alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad ou $x = \beta = \frac{11\pi}{6}$ rad.

Mostrar/Esconder ângulo

Fonte: Os autores (2024)

As soluções das equações trigonométricas possuem um padrão e, após encontrá-las para o intervalo $[0, 2\pi)$, podem ser generalizadas para o conjunto dos números reais. Essa generalização é feita no OVA 2, mostrado na Figura 2.

Figura 2 - OVA 2 – Solução da equação $tg(x) = a$

Equação $tg(x) = a$

Observe a circunferência trigonométrica ao lado com raio unitário ($r = 1$).
Seja t a reta tangente à circunferência no ponto S .
 Movimente o controle deslizante e responda: O que os ângulos α e β têm em comum?

Mostrar/Esconder resposta
 $tg(\alpha) = tg(\beta) = \overline{ST} = 1$

Para quais valores de α e β a tangente é igual a “a”?

Mostrar/Esconder resposta

Note que o controle deslizante “a” possui variação de -50 a 50 .
 Porém, sabemos que “a” varia por toda a reta tangente, ou seja, está no intervalo $(-\infty, +\infty)$.
 Então α e β podem assumir todos os valores reais, excluindo os pontos onde a tangente não existe.

Como podemos definir α e β ?

Mostrar/Esconder resposta

Observe que $\alpha = 45^\circ$ e $\beta = 225^\circ$ e que os lados dos ângulos estão na mesma reta suporte (A e A' são simétricos em relação à origem), ou seja,
 $|\alpha - \beta| = |45^\circ - 225^\circ| = |-180^\circ| = 180^\circ$ (ou π rad).

Mostrar/Esconder solução da equação

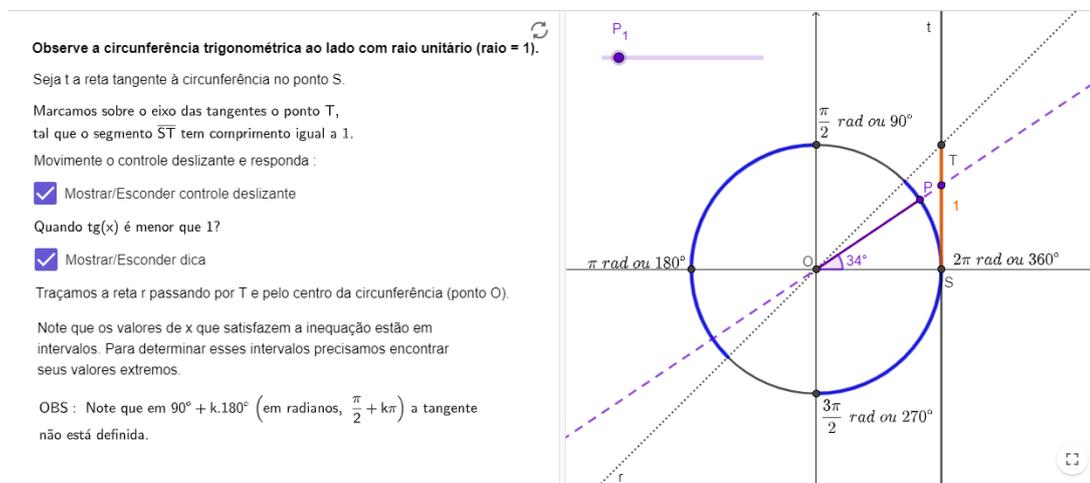
$x = \alpha + k \cdot 180^\circ$, com $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ e $k \in \mathbb{Z}$.
 Em radianos, $x = \alpha + k\pi$, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Fonte: Os autores (2024)

Nesse OVA há um controle deslizante para alterar o valor de a , que por questões técnicas está limitado, porém, pode assumir qualquer valor real. Um OVA em que são explorados os pontos nos quais a tangente não está definida também foi desenvolvido. Observa-se no OVA 2, a relação entre os ângulos α e β , os quais satisfazem a equação trigonométrica apresentada, para em seguida mostrar a solução generalizada para as demais voltas da circunferência trigonométrica.

Para a segunda atividade foram desenvolvidos três OVA que abordam inequações trigonométricas envolvendo a tangente de um ângulo, na forma $tg(x) < m$ ou $tg(x) > m$, em que m é um número real, sendo dois com casos particulares (com m fixo) e um onde é possível modificar o valor de m , utilizando o controle deslizante. O OVA 3, ilustrado na Figura 3, mostra etapas para a resolução da inequação $tg(x) < 1$.

Figura 3 - OVA 3 para a resolução da inequação trigonométrica $tg(x) < 1$



Fonte: Os autores (2024)

Novamente, a primeira janela traz textos e questões, e a segunda, permite a visualização e interação com a circunferência trigonométrica. Através do controle deslizante modifica-se o ângulo, levando os alunos a refletirem para quais ângulos a inequação está satisfeita. Na interação, os estudantes podem selecionar o botão “mostrar/esconder dica”, visualizando os arcos correspondentes à solução. A partir da interação com os OVA elaborados, espera-se que os estudantes compreendam a resolução e consigam aplicar os conhecimentos constituídos em outras equações e inequações trigonométricas que envolvam a tangente de um ângulo. Como os objetos abordam as soluções em diferentes unidades de medida (grau e radiano), busca-se a compreensão das diferentes formas de representação de um resultado.

5 Considerações finais

Neste trabalho foram apresentados três OVA sobre equações e inequações trigonométricas envolvendo a tangente de um ângulo, analisando possibilidades e potencialidades de interação com os materiais produzidos, por meio de um exercício de IP na perspectiva de Skovsmose (2015), considerando as percepções dos autores do trabalho. Na sequência da pesquisa, pretende-se organizar um livro no GeoGebra *online* com todos os OVA desenvolvidos, com o intuito de contribuir com a disponibilização de recursos digitais para o estudo de trigonometria. Entende-se que OVA são materiais que auxiliam nos processos de ensino e aprendizagem de matemática de forma dinâmica e que contribuem para uma participação mais ativa dos estudantes.

Referências Bibliográficas

- BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica**. In: BORBA, M.; ARAÚJO, J. L. (Org.). Pesquisa qualitativa em educação matemática. São Paulo: Autêntica, 2019, p.107-119.
- BORGES, P. A. P.; SCHEFFER, N. F. Contribuições de Objetos Virtuais para a aprendizagem de conceitos de Geometria. In: SCHEFFER, N. F.; COMACHIO, E.; CENCI, D. (Org.). **Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática**: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018. p. 63-77.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012.
- KENSKI, V. M. Aprendizagem Mediada pela Tecnologia. **Revista Diálogo Educacional**, [S. l.], v. 4, n. 10, p. 47-56, 2003.
- PETRY, V.; MOHR, L.; MORETTO, A. Estudo das potencialidades do uso de objetos virtuais de aprendizagem no ensino da trigonometria. **Revista Insignare Scientia - RIS**, v. 6, n. 6, p. 413-432, 26 dez. 2023.
- SKOVSMOSE, O. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D'AMBROSIO, B. S., LOPES, C. E. (Org.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas: Mercado das Letras, 2015, p. 63-90.
- SPINELLI, W. **Os objetos virtuais de aprendizagem: ação, criação e conhecimento**. Aprendizagem Matemática em Contextos Significativos: Objetos Virtuais de aprendizagem e Percursos Temáticos. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, n.d.

Palavras-chave: OVA; GeoGebra; Equações trigonométricas; Inequações trigonométricas; Imaginação Pedagógica.

Nº de Registro no sistema Prisma: PES 2023 - 0421.

Financiamento: UFFS.