

CONSTRUINDO POSSIBILIDADES PEDAGÓGICAS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES MEDIADO PELA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS

DANIELI BINOTTO^{1,2*}, LUNNA CONSOLI³, MÉRICLES THADEU MORETTI⁴,
BÁRBARA CRISTINA PASA^{2,5}

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência indispensável que está presente em inúmeros processos e fenômenos da vida cotidiana, deste modo, é exigido cada vez mais dos cidadãos o domínio de habilidades como, capacidade de interpretação e resolução de problemas da realidade utilizando modelos matemáticos estão sendo cada vez mais exigidos dos cidadãos. Entretanto, a compreensão e acesso aos objetos matemáticos, que se dá através de suas distintas representações semióticas, culminam em dificuldades vivenciadas por estudantes de diversos níveis de ensino (DUVAL, 2003).

De acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, a compreensão integral de um objeto matemático se dá através da diversidade de representações semióticas deste objeto e, mais do que isso, as conversões entre ao menos dois registros de representação (DUVAL, 2004). Isto posto e visando o trabalho com o esboço de curvas, Duval (2011) apresenta a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, a qual possibilita a compreensão integral da curva e do que ela representa. Este estudo vem inspirando muitos pesquisadores na busca por meios que viabilizem uma melhor compreensão entre as duas principais representações semióticas empregadas para o esboço de curvas, a representação algébrica e a gráfica.

Pasa (2017) apresenta um caminho alternativo para o esboço de curvas de funções reais polinomiais do segundo e terceiro grau, que perpassa a abordagem de interpretação global das propriedades figurais adotando como recurso de articulação entre unidades significativas as taxas de variação de uma função, compreendidas e calculadas por meio da noção de infinitésimos. Embasado neste caminho alternativo, que sinaliza mudanças na cultura e prática do ensino de funções, são apresentadas como frutos da pesquisa reflexões acerca do esboço da curva das funções $y = \text{sen } x$, $y = \text{cos } x$, $y = \text{tg } x$ e das hipérbolas de

1 Estudante bolsista PIBIC/CNPq do curso de Engenharia Ambiental e Sanitária, Universidade Federal da Fronteira Sul, campus Erechim, e-mail: danieli.binotto@outlook.com.

2 Grupo de estudos e pesquisas em educação matemática e tecnologias – Gepem@t

3 Estudante de ensino médio bolsista de PIBIC-EM/CNPq, e-mail: consolilunna@gmail.com.

4 Doutor, Universidade Federal de Santa Catarina, e-mail: mthmoretti@gmail.com.

5 Doutora, Universidade Federal da Fronteira Sul, campus Erechim, e-mail: bapasal@hotmail.com.

funções racionais do tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, utilizando a taxa de variação da função como recurso para a interpretação global, calculada e compreendida por meio da noção de infinitésimo.

2 OBJETIVOS

Nessa pesquisa objetivou-se problematizar o estudo de funções no âmbito do ensino médio e superior, investigando e refletindo possibilidades com base no caminho alternativo (PASA, 2017) para compreender funções, com vistas à construção de possibilidades pedagógicas para estudar funções. Nesta perspectiva, utiliza-se as taxas de variação instantâneas da função como recurso articulador para interpretação global, as quais são calculadas de compreendidas por meio da noção de infinitésimo.

3 METODOLOGIA

As investigações realizadas, bem como todas as ações que fazem parte da pesquisa estão embasadas em uma perspectiva qualitativa. A opção pela pesquisa qualitativa se justifica por privilegiar análises de resolução de problemas, descrição de experiências, relatos de compreensões e relatos de observações que possibilitam análises de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais e de acontecimentos (BICUDO, 2010).

Partindo desta ideia, a pesquisa aqui proposta se baseou em pesquisa exploratória caracterizada pela investigação profunda sobre os aspectos relacionados sobre o tema: estudo de funções, teoria cognitiva de Raymond Duval, abordagem de interpretação global de propriedades figurais, recursos distintos de interpretação global que propiciam olhares diversos ao conceito de função. Essa investigação bibliográfica e estudo foram realizados em artigos científicos, teses e dissertações.

A partir deste levantamento, organizou-se possibilidades de trabalho para o estudo de funções no ensino médio e/ou superior na perspectiva do caminho alternativo de interpretação global, cujas referências estão embasadas propostas na tese de doutorado de Pasa (2017). Assim, primeiramente, o enfoque da pesquisa foi na compreensão de trabalhos de Raymond Duval, precursor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Em seguida, a pesquisa aprofundou-se em trabalhos específicos sobre o esboço de diferentes tipos de curvas, abordados na perspectiva da teoria acima citada, dos quais extraiu-se elementos para construção da proposta, que foi elaborada para a função racional e as principais funções trigonométricas, seno, cosseno e tangente.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O caminho alternativo para esboçar curvas apresentado por Pasa (2017) para as funções reais polinomiais, perpassa o cálculo, compreensão e análise da taxa de variação instantânea da função a partir da taxa média de variação, calculada a partir de um acréscimo de quantidade infinitesimal (Δx), feita ao valor de x . Como Δx é um infinitésimo, o valor da taxa de variação média (TMV) pode também ser entendida como a taxa de variação instantânea da função em x ($TVI(x)$). Uma análise dos sinais da $TVI(x)$ para os valores do domínio fornece informações sobre a reta tangente à curva naquele ponto.

Visto que a abordagem e roteiro de cálculo é semelhante para o caso das funções trigonométricas, este resumo exemplificará a proposta para a função tangente, todavia, o mesmo foi desenvolvido para as demais funções. Inicialmente é possível calcular a TMV da função $y = tg x$ para o intervalo $[x, x + \Delta x]$.

$$TMV = \frac{tg(x + \Delta x) - tg x}{\Delta x}$$

$$TMV = \frac{\frac{\text{sen}(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\text{sen} x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$TMV = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\text{sen}(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\text{sen} x}{\cos x} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\text{sen} x \cdot \cos \Delta x + \text{sen} \Delta x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos \Delta x} - \frac{\text{sen} x}{\cos x} \right)$$

Os valores de $\text{sen} \Delta x = \Delta x$ e $\cos \Delta x = 1$ podem ser deduzidos por meio de um triângulo retângulo genérico de arco Δx , aplicando mínimo múltiplo comum e fazendo ajustes e substituições possíveis, obtém-se:

$$TMV = \frac{1}{\cos^2 x + \Delta x \text{sen} x \cdot \cos x} \xrightarrow{\Delta x \text{ é infinitesimal}} TMV = \frac{1}{\cos^2 x} = \text{sec}^2 x$$

Como a função $TVI = TVI_1 = \frac{1}{\cos^2 x} = \text{sec}^2 x$ nunca será zero, para $x \in [0, 2\pi]$, o domínio da taxa de variação instantânea será todos os reais exceto $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$. Assim, o esboço da curva será ascendente e não terá pontos máximos ou mínimos. Uma visão mais detalhada do esboço da curva pode ser obtida a partir da TVI_2 , a qual nos informa a respeito da concavidade.

$$TMV_{da\ TVI_1} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{\cos^2(x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

Utilizando substituições, mínimo múltiplo comum, simplificações e considerando Δx um infinitésimo, obtém-se a taxa de variação instantânea de segunda ordem,

$$TMV_2 = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$$

Após o estudo do sinal da taxa de variação instantânea é possível apresentar uma tabela que ilustra o crescimento e decrescimento da curva da função $y = tg x$ ao longo do domínio, e assim, concluir e compreender sobre o gráfico.

Tabela 1: Esboço das propriedades da função $y = tg x$ no domínio de $(0, 2\pi)$.

Unidades básicas simbólicas			Unidade básica gráfica	
$TVI_1(x)$	$TVI_2(x)$	Valor de x	Concavidade	Esboço do gráfico
> 0	> 0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	Positiva – para cima	
	= 0	= 0	Mudança de concavidade – ponto de inflexão	
	< 0	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	Negativa – para baixo	

Fonte: Pasa, Binotto e Moretti (2020).

A função racional $y = \frac{1}{x}$ também foi problematizada nesta perspectiva e a partir dela

pode-se discutir funções genéricas do tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Assim, a TMV da função para um

intervalo infinitesimal $[x, x+\Delta x]$ é $TMV = \frac{-1}{x^2+x \cdot \Delta x}$, e, conseqüentemente, a taxa de

variação instantânea de primeira⁶ ordem: $TVI_1(x) = \frac{-1}{x^2}$, a qual permite concluir sobre o

decréscimo desta função em todo o seu domínio. A $TVI_2(x) = \frac{2}{x^3}$ informa sobre a

concavidade da curva.

5 CONCLUSÃO

A noção do infinitésimo é empregada como ferramenta para o esboço da curva afim de possibilitar a compreensão dos estudantes no que tange à variabilidade da função, e, assim, evidenciar características e propriedades importantes para a compreensão da função e de suas distintas representações. O caminho alternativo apresentado para a proposta pedagógica, baseado na proposta de Pasa (2017), é pertinente pois possibilita a coordenação de unidades básicas simbólicas e gráficas, viabilizada pelas taxas de variação instantâneas da função, e informações relacionadas ao dinamismo, movimento e variação que muitas vezes não ficam

⁶ $TVI(x)$ ou $TVI_1(x)$ é a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função. O índice “1” é necessário quando se acrescenta às análises a ideia de variação da taxa de variação instantânea, relacionada à concavidade de uma curva e representada por $TVI_2(x)$, ou, taxa de variação instantânea de segunda ordem da função.

claras em abordagens usuais, e que de acordo as ideias apresentadas por Duval (2011), em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, são pontos essenciais para aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e Pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, pp. 101-114. 2010.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004.

DUVAL, R. **Gráficos e equações: a articulação de dois registros**. Trad. Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 91-112, 2011.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

PASA, B. C. **A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma abordagem de interpretação global das propriedades figurais**. 2017. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas e Tecnológica, Florianópolis, 2017.

PASA, B. C.; BINOTTO, D.; MORETTI, M. T. Esboçando curvas de funções trigonométricas a partir da noção de infinitésimo. **JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 8., 2020, Passo Fundo. *Anais eletrônicos...* Passo fundo: UPF, 2020. p. 1-15. Disponível em: <<https://www.upf.br/jem/educacao-atual/educacao-2020/anais/eixo-4-praticas-e-intervencoes-na-educacao-basica-e-superior>>. Acesso em: 01 set. 2021.

Palavras-chave: Estudo de funções, Possibilidades pedagógicas, Interpretação global.

Nº de Registro no sistema Prisma: PES-2020-0394.

Financiamento: CNPq.